



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Math. 218

Math. 218



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



Digitized by Google

# ANALYSE

DES

## INFINIMENT PETITS

*Par M. le Marquis DE L'HÔPITAL ,*

Suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet  
Ouvrage.

*Par l'Auteur du Guide des jeunes Mathématiciens dans  
l'étude des Leçons de Mathématique de M. l'Abbé  
de la Caille.*



A A V I G N O N ,

Chez la Veuve GIRARD & FRANÇOIS SEGUIN , Impr.  
Libraires , près la Place St. Didier.

*Se trouve à Paris ,*

Chez { JEAN DESAINT , Libraire , rue du Foin S. Jacques.  
CHARLES SAILLANT , Libraire , rue S. Jean de  
Beauvais.  
C. JOSEPH PANCKOUCKE , Libraire , rue , & à  
côté de la Comédie Française.  
DURAND Neveu , Libraire , rue S. Jacques.

---

M. D C C. L X V I I I .

AVEC APPROBATION ET PERMISSION.







---

# P R É F A C E

DE L'ÉDITEUR,

Où l'on trouvera ce qu'on doit penser de  
l'Analyse des Infiniment Petits , &  
des divers Commentaires qui en ont été  
faits.

**I**L est des hommes dont le nom  
seul fait l'éloge. M. le Marquis  
de l'Hôpital est de ce nombre ; aussi ,  
en offrant au Public la troisième édition  
du *Traité des Infiniment Petits* , ne nous  
jetterons-nous point dans le panégyri-  
que de l'Auteur. Pour donner seule-  
ment en deux mots l'idée la plus éten-  
due de ce rare & profond Génie , nous  
ferons remarquer qu'il a vécu dans un  
siècle où les Mathématiciens se propo-  
soient , par manière de défi , les pro-  
blèmes les plus embrouillés , & qu'il

a

ne se trouvoit dans le monde que M. M. *Newton* , *Leibnitz* , les deux *Bernoulli* ; *Huyghens* , & M. le Marquis de l'*Hôpital* qui fussent en état d'en donner la solution. Nous ajouterons que , lorsque M. *Huyghens* voulut s'adonner au calcul différentiel , il s'adressa à M. le Marquis de l'*Hôpital* , sous la conduite de qui il fit les progrès les plus surprenants dans la Géométrie sublime. La route que cet habile Maître lui fraya , nous la trouvons dans l'*Analyse des Infinitement Petits* ; aussi cet Ouvrage , que le monde sçavant regardera toujours comme un chef-d'œuvre , est-il le seul livre que l'on puisse mettre avec succès entre les mains de ceux qui ont appris tout ce que l'on comprend dans ce siècle éclairé sous le nom d'*éléments de Géométrie* & d'*Algèbre*. Je ne dissimulerai pas cependant qu'on a reproché à M. le Marquis de l'*Hôpital* de n'avoir écrit que pour les Sçavans , tellement rompus dans le calcul , qu'ils

entendent tout à demi mot. Ce fut pour mettre son Ouvrage à la portée des Commençans ordinaires , que M. *Crouzas* nous en donna , en 1721 , le Commentaire en un volume *in-4<sup>o</sup>* , précédé de deux amples discours , dont l'un est sur la nature des *Infiniment Petits* , & l'autre sur le *Calcul des Puissances*. A peine son Commentaire vit-il le jour , qu'il s'empressa d'en envoyer un exemplaire à M. *Jean Bernouilly*. Ce Sçavant l'examina ; & après y avoir découvert des bévues qu'on pardonneroit à peine à un écolier , il lui dit en propres termes (a) qu'il auroit mieux fait de lui envoyer son Commentaire en manuscrit , avant que de le faire imprimer ; qu'il y auroit fait des remarques qui n'auroient pas été inutiles : il ajouta qu'il auroit dû changer plusieurs de ses manieres de commenter , & leur donner un

(a) *Les Œuvres de Jean Bernouilly* , Tom. 4. pag. 160. & suiv.

autre tour , de peur que les ignorans ne prennent ses explications dans un mauvais sens , & ne cherchent par là l'occasion de décrier l'*Analyse des Infiniment Petits*.

Ce n'est pas là la seule critique qu'ait eu à essuyer le Commentaire de M. Crouzas. M. Saurin , Membre de l'Académie Royale des Sciences , démontre dans les Mémoires de cette célèbre Compagnie (a) que le Commentateur est un guide dangereux dans la grande & difficile question de *Maximis & Minimis* , & il l'exhorte à retoucher son Ouvrage dans une seconde édition. Le cas qu'a fait le Public de la première , a dispensé l'Auteur de nous en donner une seconde.

A peine le Commentaire de M. Crouzas commençoit-il à paroître , que la mort nous enleva le célèbre Varignon. Ce grand Géomètre , l'ami intime de M. le Marquis de l'Hôpital ,

(a) Année 1723 , pag. 234 & suiv.

avoit lu l'*Analyse des Infiniment Petits* avec l'attention la plus réfléchie. On lui trouva parmi ses papiers un manuscrit contenant non-seulement des explications des endroits les plus obscurs & les plus difficiles de ce Traité, mais encore des Additions considérables, des Propositions nouvelles, des Problèmes ajoutés à ceux de M. le Marquis de l'Hôpital, des Règles, des Constructions, des Méthodes différentes, &c. Ce précieux manuscrit fut donné au Public en l'année 1725 en un volume in-4°. , sous le titre d'*Eclaircissements sur l'Analyse des Infiniment Petits*. Cet Ouvrage, tout excellent qu'il est, ne peut guere être mis entre les mains d'un Commençant; M. Varignon n'y éclaircit pour l'ordinaire que les points qui ont été capables de l'arrêter lui-même. D'ailleurs cet Ouvrage posthume a été imprimé avec si peu d'exactitude, qu'il seroit presque plus difficile de corriger les fautes dont il fourmille, que de lire sans Commentaire l'*Analyse des Infiniment Petits*.

L'Ouvrage de M. le Marquis de l'Hôpital doit se trouver comme nécessairement dans la bibliothèque de tous les Mathématiciens. Les Sçavants en ont besoin pour le consulter , & pour se rappeler en peu de mots des propositions très compliquées , qu'il n'est que trop facile d'oublier. Les Commençans doivent en faire leur étude journaliere , lorsqu'ils veulent passer de la Géométrie ordinaire à la Géométrie sublime : on ne peut se regarder comme Mathématicien , que lorsqu'on a lu avec goût l'*Analyse des Infiniment Petits*.

Il nous paroît que l'édition que nous en donnons , ne peut manquer d'être favorablement accueillie. Les Sçavants , qui n'ont besoin que du texte de l'Auteur , le trouveront au commencement du Volume , imprimé avec l'exactitude la plus scrupuleuse. Les Notes que nous y avons ajoutées , & qui ne sont qu'indiquées dans le corps de l'Ouvrage , aideront les Commençans à se passer de guide dans la route

épineuse du calcul différentiel. Ces Notes sont au nombre de cinquante-cinq. Les quatre premières sont pour la première section du *Traité des Infinitement Petits*. Les 21 suivantes servent de commentaire à la seconde section. L'importante question de *Maximis & Minimis* que M. le Marquis de l'Hôpital a traitée dans la troisième section, est éclaircie par 12 Notes considérables. Un pareil nombre de Notes est destiné à commenter la matière de la quatrième section, c'est-à-dire, les *différences des différences*, & les sept exemples qui y ont rapport. Enfin ce qu'il y a de difficile dans les six dernières sections se trouve expliqué dans les six dernières Notes. Mais ce ne sont là que des généralités, & il est nécessaire d'entrer ici dans un détail beaucoup plus circonstancié.

La première section de l'*Analyse des Infinitement Petits* présente, il est vrai, les règles du calcul différentiel; mais elle les présente d'une manière si con-



cise, qu'il est presque impossible qu'un homme qui les lit pour la première fois, apprenne, sans le secours d'un habile Maître, à différentier des produits compliqués, des quantités fractionnaires, des nombres affectés d'un ou plusieurs signes radicaux, &c. Nous espérons qu'on nous sçaura quelque gré d'avoir donné à ces règles, dans nos quatre premières Notes, une étendue suffisante, & de les avoir mises à la portée de ceux qui ne sçavent que les règles du calcul ordinaire.

M. le Marquis de l'Hôpital suppose dans sa seconde section que le Lecteur se rappelle parfaitement, non-seulement les équations de toutes les espèces de *sections coniques*, de quelque genre qu'elles soient; mais celles encore de la *cycloïde*, de la *spirale*, de la *conchoïde*, de la *cissoïde*, de la *quadratrice*, de la *logarithmique ordinaire* & *spirale* &c. Nous avons cru rendre un véritable service au commun des Lecteurs, en leur donnant une idée nette des courbes que nous venons de nommer, & en leur rappelant les

démonstrations sur lesquelles sont fondées les équations qui les distinguent les unes des autres. C'est-là ce qu'il y a de plus intéressant dans les 21 Notes qui forment le commentaire de la seconde section.

Des 12 Notes que nous avons faites pour éclaircir la question de *Maximis & Minimis*, celles qui sont analogues aux articles 49, 58, 59 & 61, je veux dire, les Notes 28<sup>e</sup>, 35<sup>e</sup>, 36<sup>e</sup> & 37<sup>e</sup>, nous paroissent les plus importantes. En lisant la Note 28<sup>e</sup>, on se convaincra de plus en plus qu'il est bien rare qu'il faille se jeter dans l'infini, pour trouver le *Maximum* ou le *Minimum* d'une courbe dont l'équation est donnée. M. le Marquis de l'Hôpital ne s'y est jeté qu'une fois dans tout le cours de sa troisième section, c'est à l'article 49; & la Note qui sert de commentaire à cet article, prouve qu'il pouvoit arriver à son même résultat, en allant par le chemin ordinaire.

La Note 35<sup>e</sup>, nous paroît prouver que M. le Marquis de l'Hôpital n'a

pas toujours pris le chemin le plus court , pour parvenir à la solution des problèmes qu'il propose. Quoiqu'il ne soit pas nécessaire d'avoir recours à l'intersection du cercle & de l'hyperbole , pour résoudre le problème qui fait la matière de l'article 58 , cependant nous avons cru devoir chercher le grand axe de la courbe dont l'équation est donnée dans cet article. Quelque critique , dans un moment de mauvaise humeur , auroit pu se croire en droit de nous reprocher que nous ne rejettions la méthode proposée , que pour nous épargner la peine de construire une hyperbole sur une équation trouvée.

L'article 59 contient une équation du quatrième degré. Nous avons calculé cette longue équation , & nous l'avons transformée en quelqu'une de celles qui se trouvent dans tous les livres élémentaires d'Algèbre qui traitent des degrés supérieurs. Ces transformations ont fait la matière de la 36<sup>e</sup> Note.

Enfin la 37<sup>e</sup> Note a rapport à l'article 61 , dans lequel on propose de

trouver le jour du plus petit crépuscule , l'élevation du pole étant donnée. Comme nous sçavions que les M. M. *Bernouilly* avoient resté plus de cinq ans (a) à résoudre ce fameux problème , nous n'avons rien oublié pour donner à cette Note toute la perfection dont elle étoit susceptible.

Jusqu'à présent M. le Marquis de l'*Hôpital* n'a employé que le calcul des *différences premières*. Il fait dans les sept dernières sections de son Ouvrage grand usage des *différences des différences* ; aussi n'a-t-il pas manqué d'assigner les règles de ce calcul au commencement de sa quatrième section. Nous avons donné assez d'étendue à notre 40<sup>e</sup> Note , pour mettre ces règles dans le plus grand jour. Nous prions le Lecteur de l'examiner avec soin , & d'appliquer à différents cas particuliers la formule générale qui sert à trouver la *différence seconde* d'une quantité quelconque élevée à une puissance quelconque. Nous

(a) *Ouyres de Jean Bernouilly* , Tom. 1. pag. 64.

le prions encore de faire une attention spéciale aux Notes 41 , 45 & 48. La première nous paroît nécessaire pour l'intelligence de l'article 66 , où l'on propose le problème qui consiste à *déterminer le point d'inflexion ou de rebroussement dans une courbe dont la nature est donnée*. Dans la seconde nous démontrons que la marque que donne M. le Marquis de l'Hôpital pour trouver le point de *rebroussement* , n'est rien moins qu'une marque sûre : c'est M. Varignon qui nous a fourni cette démonstration. Enfin la troisième apprend à calculer les équations du cinquième degré ; l'article 73 auquel cette Note a rapport , fournit une équation de cette espèce. Voilà ce que nous avons fait , pour mettre à la portée des Commencans ordinaires les quatre premières sections du Traité de l'*Analyse des Infinitement Petits*. Nous sommes persuadés que quiconque nous aura suivi jusqu'à présent , sera en état de lire presque sans commentaire le reste de l'Ouvrage. Aussi n'avons-nous fait que 6 Notes pour les six dernières

fections. L'on comprend que nous n'avons pas oublié dans ces Notes les développées, & les *caustiques* par réflexion & par refraction; ce sont là des courbes de la dernière importance.

Quoique nous ayons droit de regarder comme un ouvrage qui nous appartienne en propre, les additions dont nous venons de rendre compte au Public; nous nous ferons cependant un devoir de publier que la lecture des *éclaircissemens* de M. *Varignon* nous a fait naître la plupart des idées que nous avons mis en œuvre; & nous ajouterons que nous avons profité de quelques bons endroits qui se trouvent dans le *commentaire* de M. *Crouzas*. (a)

Mais quelles connoissances faut-il

(a) Cet Auteur, quoiqu'il n'ait pas réussi à commenter M. le Marquis de l'Hôpital, auroit dû être traité avec un peu plus de ménagement par M. M. Bernouilly & Saurin. Ses *Traités de Géométrie & d'Algebre* ne passent pas pour mauvais; & ce fut son mérite réel qui lui procura en différens tems les chaires de Philosophie de Groningue & de Lausanne, une place d'Associé étranger à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & la charge de Gouverneur du Prince Frederic de Hesse Cassel, neveu du Roi de Suède.

avoir acquises pour lire avec succès l'*Analyse des Infinitement Petits* ? point d'autres que celles qui sont renfermées dans les Traités élémentaires de Mathématiques. Ces Traités comprennent l'Arithmétique ordinaire & algébrique poussée jusqu'au calcul des radicaux , aux progressions & proportions , à la formation & à la sommation des suites : l'Analyse ou la science des équations de toute sorte de degrés : la Géométrie spéculative & pratique : la Trigonométrie au moins rectiligne , en y comprenant la manière de calculer les logarithmes non-seulement des sinus , tangentes & sécantes , mais ceux encore des nombres entiers & rompus : enfin le Traité des sections coniques. Toutes ces connoissances se trouvent réunies dans les élémens d'Algèbre & de Géométrie de M. l'Abbé de la Caille , & dans le commentaire que nous en avons sous le titre : de *Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des leçons de Mathématique* du même Auteur. Ce n'est qu'après la lecture de ces deux Ouvra-

ges , que je voudrois qu'on s'adonnât au calcul différentiel. Tout bon esprit sera alors en état d'y faire , avec les secours que nous lui fournissons , les plus sensibles progrès.

Les *Infiniment Petits* de M. le Marquis de l'Hôpital ont déjà eu deux éditions , l'une en 1696 , & l'autre en 1715. Celle-là fut faite sous les yeux de l'Auteur avec toute l'exactitude imaginable. Les 14 fautes qui s'y sont glissées ne peuvent induire le Lecteur en aucune erreur ; elles sont indiquées à la fin du Volume. Pour l'édition de 1715 , elle a été dirigée par un homme qui n'avoit pas apparemment les premières idées de l'Algèbre. L'on y trouve les fautes les plus grossières & les plus propres à déconcerter un Commençant. Je pourrois en indiquer un très grand nombre ; je me contenterai d'avertir ceux qui se la sont procurée , que les *exposants* qui devroient être négatifs , n'y ont pour l'ordinaire aucun signe , ce qui les met dans la classe des *exposants* positifs. Il suffit d'avoir la moindre idée de calcul , pour



sentir combien un pareil *qui pro quo* est à craindre dans un livre d'Algèbre. L'une & l'autre de ces éditions forment une brochure *in-4°*. de 181 pages, sur caractère *S. Augustin*. L'on a fait la troisième édition sur le même caractère. Mais le peu de matière que fournit le texte de l'Auteur, & le desir que l'on a eu de procurer, à peu de frais, à tous les Mathématiciens un Ouvrage dont la nécessité est universellement reconnue, nous ont fait préférer le *format in-8°*. à l'ancien *format*. C'est rendre un véritable service au Public, que de lui présenter à un prix très-modique, en un volume d'environ 500 pages, orné d'un grand nombre de planches en taille douce, l'*Analyse des Infiniment Petits*, & le *commentaire* des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage immortel. L'Imprimeur a sujet d'espérer que l'on sera content de la partie typographique. Il n'a rien épargné, pour que la beauté de l'édition répondît à la beauté des choses que le Livre renferme.

## PRÉFACE

---

# P R É F A C E

DE L'AUTEUR.

**L'**ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, suppose la commune ; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences , & par-là elle fait connoître ceux des grandeurs finies , qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences , ceux encore des différences troisiemes, quatriemes , & ainsi de suite , sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'in-

fini ; mais l'infini de l'infini , ou une infinité d'infinis.

Une Analyse de cette nature pouvoit seule nous conduire jusqu'aux véritables principes des lignes courbées. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés , & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment , c'est-à-dire les tangentes de ces courbes , leurs perpendiculaires , leurs points d'inflexion ou de rebroussement , les rayons qui s'y réfléchissent , ceux qui s'y rompent , &c.

Les polygones inscrits ou circonscrits aux courbes , qui par la multiplication infinie de leurs côtés , se confondent enfin avec elles , ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'est que depuis la découverte de l'Analyse dont il s'agit ici , que l'on a bien senti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens sur ces matieres , principalement d'*Archimede* , est assurément digne d'admiration. Mais outre qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes , qu'ils n'y ont même touché que légèrement ; ce ne sont presque par tout que propositions particulieres & sans ordre , qui ne font appercevoir aucune méthode réguliere & suivie. Ce n'est pas cependant qu'on leur en puisse faire un reproche légitime : ils ont eu besoin d'une extrême force de génie (a) pour percer à travers tant d'obscurités , & pour entretenir les premiers dans des pais entierement inconnus. S'ils n'ont pas été loin , s'ils ont marché par de longs circuits ; du moins , quoi qu'en dise (b) *Viète* , ils ne se sont point égarés : & plus les chemins qu'ils

(a) *Archimedis de lineis spiralibus tractatum cum bis terque legissem , totasque animi vires intendissem , ut subtilissimarum demonstrationum de spiralium tangentibus artificium adsequerem ; nusquam tamen , ingenuè fatebor , ad earum contemplationem ita certus recessi , quin scrupulus animo semper hæreret , vim illius demonstrationis me non percipisse totam , &c. Bullialdus Præf. de lineis spiralibus.*

(b) *Si verè Archimedes , fallaciter conclusit Euclides , &c. Supl. Geom.*

ont tenus étoient difficiles & épineux , plus ils sont admirables de ne s'y pas être perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pu faire d'avantage pour leur temps : ils ont fait ce que nos bons esprits auroient fait en leur place ; & s'ils étoient à la nôtre , il est à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela est une suite de l'égalité naturelle des esprits & de la succession nécessaire des découvertes.

Ainsi il n'est pas surprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin ; mais on ne sçauroit assez s'étonner que de grands hommes , & sans doute d'aussi grands hommes que les Anciens , en soient si long-temps demeurés là ; & que par une admiration presque superstitieuse pour leurs ouvrages , ils se soient contentés de les lire & de les commenter , sans se permettre d'autre usage de leurs lumières , que ce qu'il en falloit pour les suivre ; sans oser commettre le crime de penser quelquefois par eux-mêmes , & de porter leur vûe au-delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette manière bien des gens

travailloient, ils écrivoient, les Livres se multiplioient, & cependant rien n'avançoit : tous les travaux de plusieurs siècles n'ont abouti qu'à remplir le monde de respectueux commentaires & de traductions répétées d'originaux souvent assez méprisables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & sur-tout de la Philosophie, jusqu'à M. *Descartes*. Ce grand homme poussé par son génie & par la supériorité qu'il se sentoit, quitta les Anciens pour ne suivre que cette même raison que les Anciens avoient suivie; & cette heureuse hardiesse, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vûes nouvelles & utiles sur la Physique & sur la Géométrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'avisa de penser.

Pour ne parler que des Mathématiques, dont il est seulement ici question, M. *Descartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la solution d'un Problème où *Pappus* dit (a) qu'ils étoient tous demeurés. On sçait jusqu'où

(a) *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

il a porté l'Analyse & la Géométrie , & combien l'alliage qu'il en a fait , rend facile la solution d'une infinité de Problèmes qui paroissent impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la résolution des égalités , il ne fit d'attention aux courbes, qu'autant qu'elles lui pouvoient servir à en trouver les racines : de sorte que l'Analyse ordinaire lui suffisant pour cela , il ne s'avisa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laissé de s'en servir heureusement dans la recherche des tangentes ; & la méthode qu'il découvrit pour cela lui parut si belle , qu'il ne fit point difficulté de dire , (a) *que ce Problème étoit le plus utile & le plus général , non-seulement qu'il sçût , mais même qu'il eût jamais désiré de sçavoir en Géométrie.*

Comme la Géométrie de M. Descartes avoit mis la construction des Problèmes par la résolution des égalités fort à la mode , & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela ; la plupart des Géomètres s'y appliquèrent , ils y firent aussi

(a) *Geomet. Liv. 2.*

de nouvelles découvertes , qui s'augmentent & se perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Pascal* , il tourna ses vues de tout un autre côté : il examina les courbes en elles-mêmes , & sous la forme de polygone ; il rechercha les longueurs de quelques-unes , l'espace qu'elles renferment , le solide que ces espaces décrivent , les centres de gravité des unes & des autres , &c. Et par la considération seule de leurs élémens , c'est-à-dire des infiniment petits , il découvrit des Méthodes générales & d'autant plus surprenantes , qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & sans Analyse.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Descartes* pour les tangentes , M. *de Fermat* en trouva aussi une , que M. *Descartes* a enfin avoué (a) lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne. Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. *Barrow* l'a rendue depuis en considérant de plus près

(a) *Lett. 72, Tom. 3.*



la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondantes; & ce triangle est semblable à celui qui se doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la soutangente: de sorte que par une simple Analogie cette dernière Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Descartes*, & que cette Méthode, elle-même, demandoit auparavant.

M. *Barrov* (a) n'en demeura pas là, il inventa aussi une espèce de calcul propre à cette Méthode; mais il lui falloit, aussi-bien que dans celle de M. *Descartes*, ôter les fractions, & faire évanouir tous les signes radicaux pour s'en servir.

Au défaut de ce calcul est survenu celui du célèbre (b) M. *Leibnitz*; & ce sçavant Géomètre a commencé où M. *Barrov*, & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des pays jusqu'ici inconnus;

(a) *Leç. Geomet.* pag. 80.

(b) *Acta Erud. Lips. an. 1684.* pag. 467.

& il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M<sup>rs</sup>. *Bernoulli* ont été les premiers qui se sont apperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais osé tenter auparavant.

L'étendue de ce calcul est immense : il convient aux courbes mécaniques, comme aux géométriques ; les signes radicaux lui sont indifférens ; & même souvent commodes ; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra ; la comparaison des infiniment petits de tous les genres lui est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux questions *De maximis & minimis*, aux points d'inflexion & de rebroussement des courbes, aux développées, aux caustiques par réflexion ou par réfraction, &c. comme on le verra dans cet Ouvrage.

Je le divise en dix Sections. La première contient les principes du calcul des différences. La seconde fait voir de quelle

manière l'on s'en doit servir pour trouver les tangentes de toutes sortes de courbes , quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime , quoique M. *Craige* ( *a* ) n'ait pas crû qu'il pût s'étendre jusqu'aux courbes mécaniques ou transcendantes. La troisieme , comment il sert à résoudre toutes les questions *De maximis & minimis*. La quatrième, comment il donne les points d'inflexion & de rebroussement des courbes. La cinquieme en découvre l'usage pour trouver les développées de M. *Hugens* , dans toutes sortes de courbes. La sixieme & la septieme font voir comment il donne les caustiques, tant par réflexion que par réfraction , dont l'illustre M. *Tschirnhaus* est l'inventeur , & pour toutes sortes de courbes encore. La huitieme en fait voir encore l'usage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données , de position , droites ou courbes. La neuvieme contient la solution de quelques Problèmes qui dépendent des découvertes

( *a* ) *De figurarum curvilinearum quadraturis* , part. 2.

précédentes. Et la dixieme consiste dans une nouvelle maniere de se servir du calcul des différences pour les courbes géométriques: d'où l'on déduit la Méthode de M<sup>r</sup> *Descartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces sortes de courbes.

Il est à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très-peu de propositions; mais elles sont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il est aisé de faire l'application à tant de propositions particulieres qu'on voudra: je la fais seulement sur quelques exemples choisis, persuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les Méthodes, & que les Livres qui ne consistent qu'en détail ou en propositions particulieres, ne sont bons qu'à faire perdre du temps à ceux qui les font, & à ceux qui les lisent. Aussi n'ai-je ajouté les Problèmes de la Section neuvieme, que parce qu'ils passent pour curieux, & qu'ils sont très-universels. Dans la dixieme Section ce ne sont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de M<sup>r</sup> *Descartes* & *Hudde*; & si

elles sont si limitées , on voit par toutes les précédentes que ce n'est pas un défaut de ce calcul , mais de la Méthode Cartésienne à laquelle on l'assujettit. Au contraire rien ne prouve mieux l'usage immense de ce calcul , que toute cette variété de Méthodes ; & pour peu d'attention qu'on y fasse , l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de M<sup>r</sup> *Descartes* & *Hudde* , & que la preuve universelle qu'il donne de l'usage qu'on y fait des progressions arithmétiques , ne laisse plus rien à souhaiter pour l'infailibilité de cette dernière Méthode.

J'avois dessein d'y ajouter encore une Section pour faire sentir aussi le merveilleux usage de ce calcul dans la Physique , jusqu'à quel point de précision il la peut porter , & combien les Mécaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché : Le Public n'y perdra pourtant rien , & il l'aura quelque jour même avec usure.

Dans tout cela il n'y a encore que la première partie du calcul de M. *Leibnitz* , laquelle consiste à descendre des grandeurs

entières à leurs différences infiniment petites, & à comparer entr'eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils soient: c'est ce qu'on appelle *Calcul différentiel*. Pour l'autre partie, qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui consiste à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux tous dont ils sont les différences, c'est-à-dire, à en trouver les sommes, j'avois aussi dessein de le donner. Mais M. *Leibnitz* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientiâ infiniti*, je n'ai eu garde de priver le Public d'un si bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverse des tangentes, pour les rectifications des courbes, pour la quadrature des espaces qu'elles renferment, pour celles des surfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimension de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &c. Je ne rends même ceci public, que parce qu'il m'en a prié par ses Lettres, & que je le crois nécessaire pour préparer les esprits à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la suite sur ces matières.

Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de M<sup>r</sup> *Bernoulli*, sur-tout à celles du jeune présentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnitz*. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser.

C'est encore une justice dûe au sçavant M. *Newton*, & que M. *Leibnitz* lui a rendue (a) lui-même: Qu'il avoit aussi trouvé quelque chose de semblable au calcul différentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé, *Philosophiæ naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel est presque tout de ce calcul. Mais la Caractéristique de M. *Leibnitz* rend le sien beaucoup plus facile & plus expéditif; outre qu'elle est d'un secours merveilleux en bien des rencontres.

Comme l'on imprimoit la dernière feuille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuventijt* m'est tombé entre les mains. Son titre, *Analysis infinitorum*, m'a donné

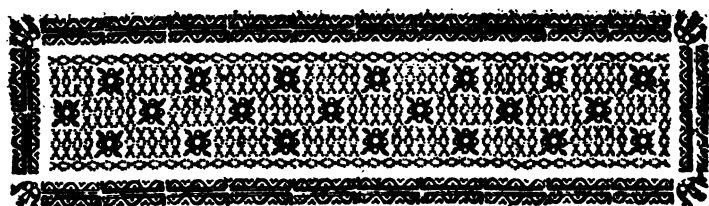
(a) *Journal des Sçavans* du 30 Août 1694.

la curiosité de le parcourir : mais j'ai trouvé qu'il étoit fort différent de celui-ci ; car outre que cet Auteur ne se sert point de la Caractéristique de M. *Leibnitz*, il rejette absolument les différences secondes, troisiemes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage sur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ses objections, & de faire voir combien elles sont peu solides, si M. *Leibnitz* n'y avoit déjà pleinement satisfait dans les Actes (a) de *Leypsick*. D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pu démontrer facilement à la maniere des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.

(a) *Acta Erud. ann. 1695. pag. 320 & 369.*







# ANALYSE

## DES

### INFINIMENT PETITS.



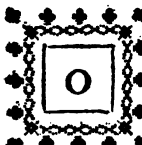
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

---

#### SECTION I

*Où l'on donne les Regles de ce Calcul.*

#### DÉFINITION I

 N appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables , au lieu que le paramètre est une quantité constante.

▲

## DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque  $AMB$ , (*Fig. 1. Pl. 1.*) qui ait pour axe ou diamètre la ligne  $AC$ , & pour une de ses appliquées la droite  $PM$ ; & soit une autre appliquée  $pm$  infiniment proche de la première. Cela posé, si l'on mène  $MR$  parallèle à  $AC$ ; les cordes  $AM$ ,  $Am$ ; & qu'on décrive du centre  $A$ , de l'intervalle  $AM$  le petit arc de cercle  $MS$ :  $Pp$  sera la différence de  $AP$ ;  $Rm$  celle de  $PM$ ;  $Sm$  celle de  $AM$ , &  $Mm$  celle de l'arc  $AM$ . De même le petit triangle  $MAm$  qui a pour base l'arc  $Mm$ , sera la différence du segment  $AM$ ; & le petit espace  $MPpm$ , celle de l'espace compris par les droites  $AP$ ,  $PM$ , & par l'arc  $AM$ .

## COROLLAIRE.

1. IL est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

## AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique  $d$  pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note  $d$  n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ;

## DES INFINIMENT PETITS. 3

$AM, z$ ; l'arc  $AM, u$ ; l'espace mixtiligne  $AMP, s$ ; & le segment  $AM, t$ : d x exprimera la valeur de  $Pp$ , d y celle de  $Rm$ , d z celle de  $Sm$ , du celle du petit arc  $Mm$ , d s celle du petit espace  $MPpm$ , & d t celle du petit triangle mixtiligne  $M A m$ .

### I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. **O**N demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou ( ce qui est la même chose ) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle , puisse être considérée comme demeurant la même. On demande, par exemple, qu'on puisse prendre  $A p$  pour  $AP, pm$  pour  $PM$ , l'espace  $A p m$  pour l'espace  $APM$ , le petit espace  $MPpm$  pour le petit rectangle  $MPpR$ , le petit secteur  $AMm$  pour le petit triangle  $AMS$ , l'angle  $pAm$  pour l'angle  $PAM$ , &c. ( Consultez la Note premiere. )

### II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. **O**N demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou ( ce qui est la même chose ) comme un polygône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe  $Mm$ , & l'arc de cercle  $MS$ , puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, enforte que

4 ANALYSE  
le petit triangle  $mSM$  puisse être censé rectiligne.

# AVERTISSEMENT.

*On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet , z , y , x , &c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premieres a , b , c , &c. marquent des quantités constantes : de sorte que x devenant  $x + dx$  ; y , z , &c. deviennent  $y + dy$  ,  $z + dz$  , &c. ( Art. 1. ) Et a , b , c , &c. demeurent les mêmes a , b , c , &c.*

## PROPOSITION I.

### PROBLÈME.

4. **P**RENDRE la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble , ou soustraites les unes des autres.

Soit  $a + x + y - z$  dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que  $x$  soit augmentée d'une portion infiniment petite , c'est-à-dire qu'elle devienne  $x + dx$  ;  $y$  deviendra alors  $y + dy$  ; &  $z$  ,  $z + dz$  ; pour la constante  $a$  , ( Art. 1. ) elle demeurera la même  $a$  : de sorte que la quantité proposée  $a + x + y - z$  deviendra  $a + x + dx + y + dy - z - dz$  ; & sa différence , que l'on trouvera en la retranchant de cette dernière , sera  $dx + dy - dz$ . Il en est ainsi des autres ; ce qui donne cette règle.

### RÈGLE I.

*Pour les quantités ajoutées , ou soustraites.*

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée , & retenant les mêmes signes ,

on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

## PROPOSITION II.

## PROBLÈME.

5. **P**RENDRE la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.

1°. La différence de  $xy$  est  $y dx + x dy$ . Car  $y$  devient  $y + dy$ , lorsque  $x$  devient  $x + dx$ ; & partant  $xy$  devient alors  $xy + y dx + x dy + dx dy$ , qui est le produit de  $x + dx$  par  $y + dy$ , & la différence sera  $y dx + x dy + dx dy$ , c'est-à-dire (*Art. 2.*)  $y dx + x dy$ , puisque  $dx dy$  est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes  $y dx$ , &  $x dy$ ; car si l'on divise, par exemple,  $y dx$  &  $dx dy$  par  $dx$ , on trouve d'une part  $y$ , & de l'autre  $dy$  qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.

2°. La différence de  $xyz$  est  $yz dx + xz dy + xy dz$ . Car en considérant le produit  $xy$  comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence  $y dx + x dy$  par la seconde  $z$  (ce qui donne  $yz dx + xz dy$ ) plus le produit de la différence  $dz$  de la seconde  $z$  par la première  $xy$  (ce qui donne  $xy dz$ ); & partant la différence de  $xyz$  sera  $yz dx + xz dy + xy dz$ .

A 3

3°. La différence de  $xyz u$  est  $u y z dx + u x z dy + u x y dz + x y z du$ . Ce qui se prouve comme dans le cas précédent, en regardant le produit  $xyz$  comme une seule quantité. Il en est ainsi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette règle.

## RÈGLE II.

*Pour les quantités multipliées.*

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de  $ax$  est  $xo + a dx$ , c'est-à-dire  $a dx$ . Celle de  $a + x \times b - y$  est  $b dx - y dx - a dy - x dy$ . (Consultez la note seconde.)

## PROPOSITION III.

## PROBLÈME

6. **P**RENDRE la différence d'une fraction quelconque.

La différence de  $\frac{z}{y}$  est  $\frac{y dz - z dy}{y^2}$ . Car supposant  $\frac{z}{y} = z$ , on aura  $x = y z$ , & comme ces deux quantités variables  $x$  &  $y z$  doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire, leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant (Art. 5.) on aura  $dx = y dz + z dy$ , &  $dz = \frac{dx - z dy}{y} = \frac{y dz - z dy}{y^2}$  en mettant pour  $z$  sa valeur  $\frac{z}{y}$ . Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette règle.

## R È G L E   I I I.

*Pour les quantités divisées , ou pour les fractions.*

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur , moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le carré du dénominateur.

Ainsi la différence de  $\frac{a}{n}$  sera  $\frac{a d n}{n^2}$  , celle de  $\frac{n}{a+n}$  sera  $\frac{a d n}{a n + 2 a n + n^2}$ . (*Consultez la note troisième.*)

## P R O P O S I T I O N   I V.

## P R O B L È M E.

7. **P**RENDRE la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.

Il est nécessaire afin de donner une règle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites , d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposants.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité , & le second une quantité quelconque  $x$  , & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant , il est clair que ces exposants formeront une progression arithmétique.

Prog. géom. 1,  $x$ ,  $xx$ ,  $x^3$ ,  $x^4$ ,  $x^5$ ,  $x^6$ ,  $x^7$ , &c.

Prog. arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au dessous de l'unité , & l'arithmétique au dessous de zero , les termes de celle-ci seront les exposants de ceux auxquels ils répondent dans l'autre.

A 4



Ainsi — 1 est l'exposant de  $\frac{1}{x}$ , — 2 celui de  $\frac{1}{x^2}$ , &c.

Prog. géom.  $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \&c.$

Prog. arith.  $1, 0, -1, -2, -3, -4, \&c.$

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi  $\sqrt{x}$  aura pour exposant  $\frac{1}{2} : \sqrt{x}, \frac{1}{3} : \sqrt[3]{x^4}, \frac{1}{4} : \sqrt[4]{x^5},$   
 $-\frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{x}}, -\frac{1}{3} : \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, -\frac{1}{4} : \&c.$  de sorte que ces

expressions  $\sqrt{x} \& x^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x} \& x^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{x} \& x^{\frac{1}{4}}, \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $\& x^{-\frac{1}{2}}, \&c.$  ne signifient que la même chose.

Prog. géom.  $1, \sqrt{x}, x, 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x,$   
 $1, \sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{xx}, \sqrt[4]{x^3}, \sqrt[4]{x^4}, x.$

Prog. arith.  $0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1,$   
 $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1. = \frac{1}{5}$

Prog. géom.  $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},$   
 $\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4},$

Prog. arith.  $-1, -\frac{1}{2}, -2, -1, -\frac{1}{3},$   
 $-\frac{1}{4}, -2, -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que  $\sqrt{x}$  est moyenne géométrique entre 1 &  $x$ , de même aussi  $\frac{1}{2}$  est moyenne arithmétique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que  $\sqrt[3]{x}$  est la première des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 &  $x$ , de même aussi  $\frac{1}{3}$  est la première des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des au-

tres. Or il suit de la nature de ces deux progressions.

1°. Que la somme des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du terme qui en est le produit. Ainsi  $x^{1+1}$  où  $x^2$  est le produit de  $x^1$  par  $x^1$ , &  $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$  où  $x^{\frac{1}{2}}$  est le produit de  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ , &  $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$  où  $x^{-\frac{1}{3}}$  est le produit de  $x^{-\frac{1}{3}}$  par  $x^{\frac{1}{3}}$ , &c. De même  $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$  où  $x^{\frac{2}{3}}$  est le produit de  $x^{\frac{1}{3}}$  par lui-même, c'est-à-dire son quarré, &  $x^{+2+2+2}$  où  $x^6$  est le produit de  $x^2$  par  $x^2$  par  $x^2$ , c'est-à-dire son cube, &  $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$  où  $x^{-\frac{4}{3}}$  est la quatrième puissance de  $x^{-\frac{1}{3}}$ , & il en est ainsi des autres puissances. D'où il est évident que le double, le triple, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique est l'exposant du quarré, du cube, &c. de ce terme; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'exposant d'un terme quelconque de la progression géométrique sera l'exposant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des exposans de deux termes quelconques de la progression géométrique sera l'exposant du quotient de la division de ces termes. Ainsi  $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = x^{\frac{1}{6}}$  sera l'exposant du quotient de la division de  $x^{\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{3}}$ , &  $x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = x^{-\frac{7}{12}}$  sera l'exposant du quotient de la division de  $x^{-\frac{1}{3}}$  par  $x^{\frac{1}{4}}$ ; où l'on voit que c'est la

même chose de multiplier  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{-\frac{1}{4}}$  que de diviser  $x^{-\frac{1}{2}}$  par  $x^{\frac{1}{4}}$ . Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas

Premier cas, lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de  $xx$  est  $2x dx$ , de  $x^3$  est  $3xx dx$ , de  $x^4$  est  $4x^3 dx$ , &c. Car le quarré de  $x$  n'étant autre chose que le produit de  $x$  par  $x$ , sa différence (*Art. 5.*) sera  $x dx + x dx$ , c'est-à-dire  $2x dx$ . De même le cube de  $x$  n'étant autre chose que le produit de  $x$  par  $x$  par  $x$ , sa différence (*Art. 5.*) sera  $xx dx + xx dx + xx dx$ , c'est-à-dire  $3xx dx$ ; & comme il en est ainsi des puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que  $m$  marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de  $x^m$  sera  $mx^{m-1} dx$ .

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de  $x^{-m}$  ou de  $\frac{1}{x^m}$  sera  $\frac{-mx^{m-1} dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} dx$ .

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de

$\sqrt[n]{x^m}$  ou  $x^{\frac{m}{n}}$  ( $\frac{m}{n}$  exprime un nombre rompu quelconque) on supposera  $x^{\frac{m}{n}} = z$ , & en élevant chaque membre à la puissance  $n$  on aura  $x^m = z^n$ , & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera  $mx^{m-1} dx$

$$= nx^{n-1} dz, \& dz = \frac{mx^{m-1} dx}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx, \text{ ou}$$

$\frac{m}{n} dx \sqrt[n]{x^{m-n}}$ , en mettant à la place de  $nx^{n-1}$  sa valeur  $nx^{m-\frac{m}{n}}$ . Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de  $x^{-\frac{m}{n}}$  ou de  $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$  sera

$$\frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx. \text{ Ce qui donne}$$

cette règle générale.

## R È G L E IV.

*Pour les Puissances parfaites ou imparfaites.*

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que  $m$  exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, &  $x$  une quantité variable quelconque, la différence de  $x^m$  sera toujours  $mx^{m-1} dx$ .

## E X E M P L E S.

La différence du cube de  $ay - xx$ , c'est-à-dire de  $ay - xx$ , est  $3 \times ay - xx \times a dy - 2x dx$   
 $= 3a^3 yy dy - 6aaxxy dy + 3ax^4 dy - 6aayyx dx + 12axyx^3 dx - 6x^5 dx.$

La différence de  $\sqrt{xy+yy}$  ou de  $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$ , est  
 $\frac{1}{2} \times \overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}} \times ydx + xdy + 2ydy$ , ou  $\frac{ydn+ndy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$

Celle de  $\sqrt{a^4+axyx}$  ou de  $\overline{a^4+axyx}^{\frac{1}{2}}$ , est  $\frac{1}{2} \times$   
 $\overline{a^4+axyx}^{-\frac{1}{2}} \times ayydx + 2axydy$ , ou  $\frac{ayydn+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyx}}$ .

Celle de  $\sqrt[3]{ax+xx}$ , ou de  $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$ , est  
 $\frac{1}{3} \times \overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}} \times adx + 2xdx$ , ou  $\frac{adn+2xdn}{3\sqrt[3]{ax+xx}^2}$ .

La différence de  $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyx}}$  ou  
 de  $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyx}}^{\frac{1}{2}}$ , est  $\frac{1}{2} \times$   
 $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyx}}^{-\frac{1}{2}} \times adx + 2xdx + \frac{ayydn+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyx}}$ ,  
 ou  $\frac{adn+2xdn}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyx}}} + \frac{ayydn+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyx} \times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyx}}}$ .

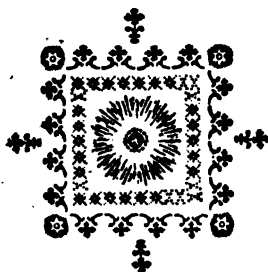
La différence de  $\frac{\sqrt{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$  fera selon cette règle  
 ( Art. 7. 6. ) & celle des fractions . . . . .  
 $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+xx}^2} \times \sqrt{xy+yy} - \frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}} \times \sqrt[3]{ax+xx}$ .

( Consultez la note quatrieme. )

#### REMARQUE.

8. IL est à propos de bien remarquer que l'on a  
 toujours supposé en prenant les différences, qu'une  
 des variables  $x$  croissant, les autres  $y$ ,  $z$ , &c.  
 croissent aussi ; c'est-à-dire que les  $x$  deve-

nant  $x + dx$ , les  $y$ ,  $z$ , &c. devenoient  $y + dy$ ,  $z + dz$ , &c. C'est pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître; & changer par conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminuent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les  $x$  croissant, les  $y$  & les  $z$  diminuent, c'est-à-dire que les  $x$  devenant  $x + dx$ , les  $y$  & les  $z$  deviennent  $y - dy$  &  $z - dz$ , & que l'on veuille prendre la différence du produit  $xyz$ ; il faudra changer dans la différence  $xydz + xzdy + yzdx$  trouvée (*Art. 5.*), les signes des termes où  $dy$  &  $dz$  se rencontrent: ce qui donne  $yzdx - xzdy - xydz$  pour la différence cherchée,



## SECTION II.

*Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.*

## DÉFINITION.

**S**I l'on prolonge un des petits côtés  $Mm$  (Fig. 2. Pl. 1.) du poligone qui compose (Art. 3.) une ligne courbe; ce petit côté ainsi prolongé sera appelé la *Tangente* de la courbe au point  $M$  ou  $m$ . (Consultez la Note cinquieme.)

## PROPOSITION I.

## PROBLÈME.

9. **S**OIT une ligne courbe  $AM$  (Fig. 3. Pl. 1.) telle que la relation de la coupée  $AP$  à l'appliquée  $PM$ , soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné  $M$  sur cette courbe mener la tangente  $MT$ .

Ayant mené l'appliquée  $MP$ , & supposé que la droite  $MT$  qui rencontre le diamètre au point  $T$ , soit la tangente cherchée; on concevra une autre appliquée  $mp$  infiniment proche de la première, avec une petite droite  $MR$  parallèle à  $AP$ . Et en nommant les données  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; (donc  $Pp$  ou  $MR = dx$ , &  $Rm = dy$ .) les triangles semblables  $mRM$  &  $MPT$  donneront  $mR(dy) : RM(dx) :: MP(y) : PT = \frac{ydx}{dy}$ . Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de  $dx$  en termes

qui seront tous affectés par  $dy$ , laquelle étant multipliée par  $y$  & divisée par  $dy$ , donnera une valeur de la soutangente PT en termes entièrement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT. (*Consultez la Note sixieme.*)

## REMARQUE.

10. **L**ORSQUE le point T (*Fig. 4. Pl. 1.*) tombe du côté opposé au point A origine des  $x$ , il est clair que  $x$  croissant,  $y$  diminue, & qu'il faut changer par conséquent (*Art. 8.*) dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où  $dy$  se rencontre : autrement la valeur de  $dx$  en  $dy$  seroit négative ; & partant aussi celle de PT ( $\frac{ydx}{dy}$ ). Il est mieux cependant, pour ne se point embarrasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a prescrites (*Secl. 1.*) sans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur PT soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine de  $x$ , comme l'on a supposé en faisant le calcul : & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans.

## EXEMPLE I.

11. 1<sup>o</sup>. **S**I l'on veut que  $ax = yy$  exprime la relation de AP à PM, (*Fig. 3. Pl. 1.*) la courbe AM sera une parabole qui aura pour paramètre la droite donnée  $a$ , & l'on aura en pre-



nant de part & d'autre les différences,  $adx = 2ydy$ , &  $dx = \frac{2y}{x} dy$  &  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = \frac{2y}{x} = 2x$  en mettant pour  $yy$  sa valeur  $ax$ . D'où il suit que si l'on prend  $PT$  double de  $AP$ , & qu'on mène la droite  $MT$ , elle sera tangente au point  $M$ . Ce qui étoit proposé.

2°. Soit l'équation  $aa = xy$  qui exprime la nature de l'hyperbole entre les asymptotes. (Fig. 4. Pl. 1.) On aura en prenant les différences  $xdy + ydx = 0$ , & partant  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = -x$ . D'où il suit que si l'on prend  $PT = PA$  du côté opposé au point  $A$ , & qu'on mène la droite  $MT$ , elle sera la tangente en  $M$ .

3°. Soit l'équation générale  $y^m = x$  qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lorsque l'exposant  $m$  marque un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences  $my^{m-1}dy = dx$ , & partant  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = my^m = mx$  en mettant pour  $y^m$  sa valeur  $x$ .

Si  $m = \frac{1}{3}$ , l'équation sera  $y^3 = axx$  qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la soutangente  $PT = \frac{1}{3}x$ . Si  $m = -2$ , l'équation sera  $a^3 = xyx$  qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la soutangente  $PT = -2x$ . Il en est ainsi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point  $A$  origine des  $x$ , il faut chercher quelle doit être la raison de  $dx$  à  $dy$  en ce point; car il est visible que cette raison étant connue, l'an-

gle

gle que la tangente fait avec l'axe ou le diamètre sera aussi déterminé. On a dans cet exemple  $dx : dy :: my^{m-1}$ . 1. D'où l'on voit que  $y$  étant zero en A, la raison de  $dy$  à  $dx$  doit y être infiniment grande lorsque  $m$  surpasse 1, & infiniment petite lorsqu'elle est moindre : c'est-à-dire que la tangente en A doit être parallèle aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diamètre dans le second. (*Consultez la Note septieme.*)

## E X E M P L E II.

12. S O I T une ligne courbe AMB (*Fig. 5. Pl. 1.*) telle que  $AP \times PB (x \times a - x) \cdot PM^2 (yy) :: AB (a) \cdot AD (b)$ . Donc  $\frac{ayy}{b} = ax - xx$ , & en prenant les différences,  $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$ ; d'où l'on tire  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$ ; en mettant pour  $\frac{ayy}{b}$  sa valeur  $ax - xx$ ; &  $PT = AP$  ou  $AT = \frac{ax}{a - 2x}$ . (*Voyez la note 8.*)

Supposant à présent que  $AP^3 \times PB^2 (x^3 \times a - x^2) \cdot PM^5 (y^5) :: AB (a) \cdot AD (b)$ , on aura  $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times a - x^2$ ; & en prenant les différences  $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times a - x^2 - 2adx + 2xdx \times x^3$ , d'où l'on tire  $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times a - x^2}{3xx \times a - x^2 - 2a + 2x \times x^3} = \frac{5x \times a - x}{3a - 3x - 2x}$   
B

ou  $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$  &  $AT = \frac{2ax}{3a - 5x}$ . (Voyez la Note 8.)

Et généralement si l'on veut que  $m$  marque l'exposant de la puissance de  $AP$ , &  $n$  celui de la puissance de  $PB$ , on aura  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m$

$\times a - x^n$  qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est

$$\frac{m + nay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \frac{a - x^n}{na - x^{n-1}dx \times x^m}, \text{ d'où l'on tire (en mettant}$$

pour  $\frac{ay^{m+n}}{b}$  la valeur  $x^m \times \frac{a - x^n}{na - x^{n-1}dx \times x^m}$ )  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right)$

$$= \frac{\frac{m + nx^m \times \frac{a - x^n}{na - x^{n-1}dx \times x^m}}{mx^{m-1} \times \frac{a - x^n}{na - x^{n-1}dx \times x^m}}}{\frac{m + nx \times \frac{a - x}{ma - x - nx}}{ma - x - nx}},$$

$$\text{ou } PT = \frac{m + n \times \frac{ax - xx}{ma - m - nx}}{\frac{nax}{ma - m - nx}}, \text{ \& } AT = \frac{nax}{ma - m - nx}.$$

(Voyez la Note 8.)

### EXEMPLE III.

13. LES mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point  $B$  (Fig. 6. Pl. 1.) tombe de l'autre côté du point  $A$  par rapport au point

$P$ , on aura l'équation  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \frac{a + x^n}{b}$  qui

exprime la nature de toutes les hyperboles considérées par rapport à leurs diamètres. D'où l'on

$$\text{tirera comme ci-dessus } PT = \frac{m + n \times \frac{ax + xx}{ma + m + nx}}{ma + m + nx}$$

$$\text{\& } AT = \frac{nax}{ma + m + nx}. \text{ (Voyez la Note 9. num. 1.)}$$

Maintenant si l'on suppose que AP soit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, c'est-à-dire, qu'elle en deviendra l'asymptote CE; & l'on aura en ce cas  $AT \left( \frac{nax}{ma+m+nx} \right) = \frac{n}{m+n} a = AC$ ; puisque  $a$  étant infiniment moindre que  $x$ , le terme  $ma$  sera nul par rapport à  $m+nx$ . Par la même raison en ce cas l'équation à la courbe deviendra  $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ . Ainsi en faisant, pour abrégé,  $m+n=p$ , & en extrayant de part & d'autre la racine  $p$ , on aura  $y \sqrt[p]{a} = x \sqrt[p]{b}$ , dont la différence est  $dy \sqrt[p]{a} = dx \sqrt[p]{b}$ : de sorte qu'en menant AE parallèle aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion  $dx : dy$ , ou  $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: AC : \left( \frac{n}{p} a \right)$ .  $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}}$ . Or les valeurs de CA & AE étant ainsi déterminées, on menera la droite indéfinie CE qui sera l'asymptote cherchée.

Si  $m=1$  &  $n=1$ , la courbe sera l'hyperbole ordinaire, & on aura  $AC = \frac{1}{2} a$ , &  $AE = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$ , c'est-à-dire à la moitié du diamètre conjugué, ce que l'on sçait d'ailleurs être conforme à la vérité. (*Voyez la Note 9. num. 2. & suivants.*)

#### EXEMPLE IV.

14. SOIT l'équation  $y^3 - x^3 = axy$  ( $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $a$  est une ligne droite donnée) & que

B 2

cette équation exprime la nature de la courbe AM, (Fig. 6. Pl. 1.) sa différence sera  $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$ . Donc  $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$ ,

& AT  $(\frac{ydx}{dy} - x) = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay}$  en mettant pour  $3y^3 - 3x^3$  sa valeur  $3axy$ . (Voyez la Note 10. quest. 1. 2.)

Maintenant si l'on suppose que AP & PM soient chacune infiniment grande, la tangente TM deviendra l'asymptote CE, & les droites AT, AS deviendront AC, AE qui déterminent la position de l'asymptote. Or AT que j'appelle  $t = \frac{axy}{3xx + ay}$ , d'où l'on tire  $y = \frac{3txx}{ax - at}$

$= \frac{3tx}{a}$  lorsque AT devient AC, parce qu'alors  $at$  est nulle par rapport à  $ax$ . Mettant donc cette valeur  $\frac{3tx}{a}$  à la place de  $y$  dans  $y^3 - x^3 = axy$ , on aura  $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$ , d'où l'on tire (en effaçant le terme  $3a^3txx$ , parce que  $x$  étant infinie, il est nul par rapport aux deux autres  $27t^3x^3$  &  $a^3x^3$ )  $AC(t) = \frac{1}{3}a$ . De même AS  $(y - \frac{xdy}{dx})$  que j'appelle  $s = \frac{axy}{3yy - ax}$ ,

d'où l'on tire  $x = \frac{3syy}{ay + as} = \frac{3sy}{a}$ , parce que  $y$  étant infinie par rapport à  $s$ , le terme  $as$  sera nul par rapport au terme  $ay$ ; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera  $AE(s) = \frac{1}{3}a$ . D'où il suit que si

l'on prend les lignes AC, AE égales chacune à  $\frac{1}{3}a$ , & qu'on mene la droite indéfinie CE, elle sera l'asymptote de la courbe AM. (*Consultez la Note dixieme, quest. 3. & suiv.*).

On se réglera sur ces deux derniers exemples pour trouver les asymptotes des autres lignes courbes.

## PROPOSITION II.

## PROBLÈME.

15. **SI** l'on suppose dans la proposition précédente que les coupées AP (Fig. 7. Pl. I.) soient des portions d'une ligne courbe dont l'on sçache mener les tangentes PT, & qu'il faille du point donné M sur la courbe AM mener la tangente MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & supposé que la droite MT qui la rencontre en T, soit la tangente cherchée; on imaginera une autre appliquée  $mp$  infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT: & en nommant les données AP,  $x$ ; PM,  $y$ ; on aura comme auparavant Pp ou MR  $= dx$ , Rm  $= dy$ , & les triangles semblables mRM & MPT donneront  $mR(dy) \cdot RM(dx) :: MP(y) \cdot PT = \frac{ydx}{dy}$ . On achevera ensuite le reste par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées AP ( $x$ ) aux appliquées PM ( $y$ ), comme l'on a vû dans les exemples qui précèdent, & comme l'on verra encore dans ceux qui suivent. (*Consultez la Note 11.*)

## EXEMPLE I.

16. **SOIT**  $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$ , dont la différence est

$$\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}} : \text{on aura}$$

en réduisant cette égalité à une proportion  $dy$ .

$$dx (MP \cdot PT) : : \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} \cdot \frac{2xy}{xx} = \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}.$$

Et partant le rapport de la donnée  $MP$  à la soutangente cherchée  $PT$ , sera exprimé en termes entièrement connus & délivrés des différences. Ce qu'il étoit proposé.

## EXEMPLE II.

17. **SOIT**  $x = \frac{ay}{b}$ , dont la différence est  $dx =$

$$\frac{ady}{b} : \text{on aura } PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = \frac{ay}{b} = x. \text{ Si l'on sup-}$$

pose que la ligne courbe  $APB$  soit un demi-cercle, & que les appliquées  $MP$ , étant prolongées en  $Q$ , soient perpendiculaires sur le diamètre  $AB$ ; la courbe  $AMC$  sera une demi-roulette ou cycloïde : simple lorsque  $b = a$ ; allongée, lorsqu'elle est plus grande; & accourcie, lorsqu'elle est moindre. (*Consultez la Note 12.*)

## COROLLAIRE.

18. **SI** la roulette étant simple, l'on mène la corde  $AP$ ; je dis qu'elle sera parallèle à la tangente  $MT$ . Car le triangle  $MPT$  étant alors isoscele, l'angle externe  $TPQ$  sera double de

l'interne opposé  $TMQ$ . Or l'angle  $APQ$  est égal à l'angle  $APT$ , puisque l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc  $AP$ ; & partant il est la moitié de l'angle  $TPQ$ . Les angles  $TMQ$ ,  $APQ$  seront donc égaux entr'eux; & par conséquent les lignes  $MT$ ,  $AP$  seront parallèles. (Consultez la Note douzieme.)

## PROPOSITION III.

## PROBLÈME.

19. SOIT une ligne courbe quelconque  $AP$  qui ait (Fig. 7. Pl. 1.) pour diamètre la droite  $KNAQ$ , & dont l'on sçache mener les tangentes  $PK$ ; soit de plus une autre courbe  $AM$ , telle que menant, comme on voudra, l'appliquée  $MQ$  qui coupe la première courbe au point  $P$ , la relation de l'arc  $AP$  à l'appliquée  $MQ$  soit exprimés par une équation quelconque. Il faut d'un point donné  $M$  mener la tangente  $MN$ .

Ayant nommé les connues  $PK$ ,  $t$ ;  $KQ$ ,  $s$ ; l'arc  $AP$ ,  $x$ ;  $MQ$ ,  $y$ ; l'on aura (en concevant une autre appliquée  $mq$  infiniment proche de  $MQ$ , & en tirant  $PO$ ,  $MS$  parallèles à  $AQ$ )  $Pp = dx$ ,  $mS = dy$ ; & à cause des triangles semblables  $KPQ$  &  $PpO$ ,  $mSM$  &  $MQN$ , l'on aura  $PK (t) \cdot KQ (s) :: Pp (dx) \cdot PO$  ou  $MS = \frac{sdx}{t}$ . Et  $mS (dy) \cdot SM (\frac{sdx}{t}) :: MQ (y) \cdot QN = \frac{sydx}{tdy}$ . Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de



$dx$  en termes qui seront tous affectés par  $dy$  ; & partant si l'on substitue cette valeur à la place de  $dx$  dans  $\frac{sydx}{txy}$ , les  $dy$  se détruiront, & la valeur de la sous-tangente cherchée  $QN$  sera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il falloit trouver.

## PROPOSITION IV.

## PROBLÈME.

20. SOIENT deux lignes courbes  $AQC$ ,  $BCN$  (Fig. 8. Pl. 1.) qui aient pour diamètre la droite  $TEABF$ , & dont l'on sçache mener les tangentes  $QE$ ,  $NF$  ; soit de plus une autre ligne courbe  $MC$  telle que la relation des appliquées  $MP$ ,  $QP$ ,  $NP$ , soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné  $M$  sur cette dernière courbe lui mener la tangente  $MT$ .

Ayant imaginé aux points  $Q$ ,  $M$ ,  $N$ , les petits triangles  $Qoq$ ,  $MRm$ ,  $NSn$ , & nommé les connues  $PE$ ,  $s$  ;  $PF$ ,  $t$  ;  $PQ$ ,  $x$  ;  $PM$ ,  $y$  ;  $PN$ ,  $z$  ; l'on aura  $oq = dx$ ,  $Rm = dy$ ,  $Sn = -dz$ , (Art. 8.) parce que  $x$  &  $y$  croissant,  $z$  diminue. Et à cause des triangles semblables  $QPE$  &  $qoQ$ ,  $NPF$  &  $nSN$ ,  $MPT$  &  $mRM$  ; l'on aura  $QP(x) \cdot PE(s) :: qo(dx) \cdot oQ$  ou  $MR$  ou  $SN = \frac{sdx}{x}$ . Et  $NP(z) \cdot PF(t) :: nS(-dz) \cdot SN = \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$  (d'où l'on tire  $dz = \frac{-sdx}{tx}$ ). Et  $mR(dy) \cdot RM$

$\left(\frac{sydx}{x}\right) :: MP(y) \cdot PT = \frac{sydx}{xdy}$ . Or si l'on met dans la différence de l'équation donnée, à la place de  $d\zeta$ , sa valeur  $-\frac{s\zeta dx}{tx}$ , on trouvera une valeur de  $dx$  en  $dy$ , laquelle étant substituée dans  $\frac{sydx}{xdy}$ , les  $dy$  se détruiront, & la valeur de la soutangente  $PT$  fera exprimée en termes tous connus.

## E X E M P L E.

21. SOIT  $yy = x\zeta$ , dont la différence est  $2ydy = \zeta dx + x d\zeta = \frac{t\zeta dx - s\zeta dx}{t}$ , en mettant pour  $d\zeta$  sa valeur négative  $-\frac{s\zeta dx}{tx}$ , d'où l'on tire  $dx = \frac{2tydy}{t\zeta - s\zeta}$ ; & partant  $PT, \left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{2sty}{tx\zeta - sx\zeta} = \frac{2st}{t - s}$ , en mettant pour  $yy$  sa valeur  $x\zeta$ .

Soit maintenant l'équation générale  $y^{m+n} = x^m \zeta^n$ , dont la différence est  $\overline{m+ny}^{m+n-1} dy = m\zeta^n x^{m-1} dx + nx^m \zeta^{n-1} d\zeta = \frac{mt\zeta^n x^{m-1} dx - ns\zeta^n x^{m-1} dx}{t}$ , en mettant pour  $d\zeta$  sa valeur  $-\frac{s\zeta dx}{tx}$ , d'où l'on tire  $PT \left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{mst + ns\zeta^n x^m}{mt\zeta^n x^m - ns\zeta^n x^m} = \frac{mst + ns}{mt - ns}$ , en mettant pour  $y^{m+n}$  sa valeur  $x^m \zeta^n$ .

On peut remarquer que si les courbes  $AQC$ ,  $BCN$  devenoient des lignes droites, la courbe  $MC$  seroit alors une des Sections coniques à l'in-

fini ; sçavoir une Ellipse lorsque l'appliquée  $CD$ , qui part du point de rencontre  $C$ , tombe entre les extrémités  $A$ ,  $B$  ; une Hyperbole, lorsqu'elle tombe de part ou d'autre ; & enfin une Parabole, lorsque l'une des extrémités  $A$  ou  $B$  est infiniment éloignée de l'autre, c'est-à-dire, lorsqu'une des lignes droites  $CA$  ou  $CB$  est parallèle au diamètre  $AB$ . (Consultez la Note treizieme.)

## PROPOSITION V.

## PROBLÈME.

22. **S**OIT une ligne courbe  $APB$  (Fig. 9. Pl. 1.) qui ait un commencement fixe & invariable au point  $A$ , & dont l'on sçache mener les tangentes  $PH$  ; soit hors de cette ligne un autre point fixe  $F$ , & une autre ligne courbe  $CMD$  telle qu'ayant mené la droite quelconque  $FMP$ , la relation de sa partie  $FM$  à la portion de courbe  $AP$  soit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propose de mener du point donné  $M$  la tangente  $MT$ .

Ayant mené sur  $FP$  la perpendiculaire  $FH$  qui rencontre la tangente donnée  $PH$  au point  $H$ , & la cherchée  $MT$  au point  $T$  ; imaginé une droite  $FRmOp$  qui fasse avec  $FP$  un angle infiniment petit ; & décrit du centre  $F$  les petits arcs de cercle  $PO$ ,  $MR$  ; le petit triangle  $pOP$  sera semblable au triangle rectangle  $PFH$  ; car les angles  $HPF$ ,  $HpF$  sont (Art. 2.) égaux, puisqu'ils ne diffèrent entr'eux que de l'angle  $PFp$  que l'on suppose infiniment petit ; & de plus l'angle  $pOP$  est droit, puisque la tangente en  $O$

( qui n'est autre chose que la continuation du petit arc PO considéré comme une droite ) est perpendiculaire sur le rayon FO. Par la même raison les triangles  $mRM$ ,  $MFT$  seront semblables. Or il est clair que les petits triangles ou secteurs  $FPO$  &  $FMR$  sont semblables. Si donc l'on nomme les connues  $PH$ ,  $t$ ;  $HF$ ,  $s$ ;  $FM$ ,  $y$ ;  $FP$ ,  $z$ ; & l'arc  $AP$ ,  $x$ ; on aura  $PH(t) \cdot HF(s) :: Pp(dx) \cdot FO = \frac{sdx}{t}$ . Et  $FP(z) \cdot FM(y) :: PO(\frac{sdx}{t}) \cdot MR = \frac{ysdx}{tz}$ . Et  $mR(dy) \cdot RM(\frac{sydx}{tz}) :: FM(y) \cdot FT = \frac{sydy}{tz}$ . Et on achevera le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée. (*Consultez la Note quatorzieme.*)

E X E M P L E.

23. SI l'on veut que la courbe  $APB$  (*Fig. 10. Pl. 1.*) soit un cercle qui ait pour centre le point fixe  $F$ ; il est clair que la tangente  $PH$  devient parallele & égale à la soutangente  $FH$ , à cause que  $HP$  sera aussi perpendiculaire à  $PF$ ; & qu'ainsi l'on aura en ce cas  $FT = \frac{yydx}{zdy} = \frac{yydx}{ady}$ , en nommant la droite  $FP(z)$ ,  $a$ ; parce qu'elle devient constante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela posé, si l'on nomme la circonférence entiere, ou une de ses portions déterminées  $b$ ; & que l'on fasse  $b \cdot x :: a \cdot y$ ; la courbe  $CMD$ , qui est en ce cas  $FMD$ , sera la Spirale d'*Archimede*, & l'on aura  $y = \frac{ax}{b}$  qui a pour sa

différence  $dy = \frac{adx}{b}$ , d'où l'on tire  $ydx = \frac{bydy}{a}$   
 $= xdy$  en mettant pour  $y$  sa valeur  $\frac{ax}{b}$ ; & par-  
 tant FT  $(\frac{yydx}{ady}) = \frac{xy}{a}$ . Ce qui donne cette cons-  
 truction.

Soit décrit du centre F & du rayon FM, l'arc de cercle MQ, terminé en Q par le rayon FA qui joint les points fixes A, F; soit pris FT égale à l'arc MQ: je dis que la droite MT sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables FPA, FMQ, l'on aura FP (a). FM (y) :: AP (x). MQ  $= \frac{yx}{a} = FT$ .

Si l'on fait en général  $b \cdot x :: a^m \cdot y^m$ , (l'exposant  $m$  désigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe FMD sera une des spirales à l'infini, & l'on aura  $y^m = \frac{a^m x}{b}$ , qui a pour la différence  $my^{m-1}dy = \frac{a^m dx}{b}$ , d'où l'on tire  $ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$ , en mettant pour  $y^m$  sa valeur  $\frac{a^m x}{b}$ ; & partant FT  $(\frac{yydx}{ady}) = \frac{mxy}{a} = m \times MQ$ .

## PROPOSITION VI.

### PROBLÈME.

24. SOIT une ligne courbe APB (Fig. II. Pl. I.) dont l'on sçache mener les tangentes PH, & un point fixe F hors de cette ligne; soit une autre

*ligne courbe CMD telle que menant comme on voudra, la droite FPM, la relation de FP à FM soit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné M mener la tangente MT.*

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire sur FM, & imaginé comme dans la proposition précédente les petits triangles PO*p*, MR*m* semblables aux triangles HFP, TFM, on nommera les connues FH, *s*; FP, *x*; FM, *y*; & l'on aura  $PF(x) \cdot FH(s) :: pO(dx) \cdot OP = \frac{sdx}{x}$ . Et

$FP(x) \cdot FM(y) :: OP(\frac{sdx}{x}) \cdot RM = \frac{sydx}{xx}$ . Et

$mR(dy) \cdot RM(\frac{sydx}{xx}) :: FM(y) \cdot FT = \frac{sydy}{xx}$ .

On achevera ensuite le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée. (*Consultez la Note quinziesme.*)

## E X E M P L E.

25. SI l'on veut que la courbe APB soit une ligne droite PH, & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM soit  $y - x = a$ , c'est-à-dire, que PM soit toujours égale à la même droite donnée *a*; l'on aura pour différence  $dy = dx$ ; & partant  $FT(\frac{sydy}{xx}) = \frac{sy}{xx}$ . Ce qui donne cette construction.

Soit menée ME parallèle à PH, & MT parallèle à PE; je dis qu'elle sera tangente en M.

Car  $FP(x) \cdot FH(s) :: FM(y) \cdot FE = \frac{sy}{x}$ . Et

$FP(x) \cdot FE\left(\frac{sy}{x}\right) :: FM(y) \cdot FT = \frac{sy}{xx}$ . Il est clair que la courbe CMD est la Conchoïde de Nicomede, dont l'asymptote est la droite PM, & le pole est le point fixe F.

## PROPOSITION VII.

## PROBLÈME.

26. **S**OIT une ligne courbe ARM (Fig. 12. Pl. 1.) dont l'on sçache mener les tangentes MH, & qui ait pour diamètre la droite EPAHT; soit hors de ce diamètre un point fixe F, d'où parte une ligne droite indéfinie FPSM qui coupe le diamètre en P & la courbe en M. Si l'on conçoit maintenant que la droite FPM, en tournant autour du point F, fasse mouvoir le plan PAM toujours parallèlement à soi-même le long de la ligne droite ET immobile & indéfinie, en sorte que la distance PA demeure par tout la même; il est clair que l'intersection continuelle M des lignes FM, AM décrira dans ce mouvement une ligne courbe CMD. On propose de mener d'un point donné M sur cette courbe la tangente MT.

Ayant imaginé que le plan PAM soit parvenu dans la situation infiniment proche *pam*, & tiré la ligne *mRS* parallèle à AP; il est clair par la génération que  $Pp = Aa = Rm$ ; & partant que  $RS = Sm - Pp$ . Or nommant les connues FP ou  $Fp$ ,  $x$ ; FM ou  $Fm$ ,  $y$ ; PH,  $s$ ; MH,  $t$ ; & la différence  $Pp$ ,  $dz$ ; les triangles semblables  $FPp$  &  $FSm$ , MPH & MSR,

MHT & MR  $m$ , donneront  $Fp(x) \cdot Fm(y)$   
 $:: Pp(dz) \cdot Sm = \frac{ydz}{x}$  (donc  $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$ ).

Et  $PH(s) \cdot HM(t) :: SR(\frac{ydz - xdz}{x}) \cdot RM$   
 $= \frac{tydz - txdz}{sx}$ . Et  $MR(\frac{tydz - txdz}{sx}) \cdot Rm(dz)$

$:: MH(t) \cdot HT = \frac{sx}{y - x}$ . Donc si l'on mene

FE parallele à MH, & qu'on prenne  $HT = PE$ ;  
 la ligne MT sera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite; la  
 courbe CMD seroit une Hyperbole qui auroit  
 pour une de ses asymptotes la ligne ET. Et si  
 elle étoit un cercle qui eût son centre au point  
 P; la courbe CMD seroit la Conchoïde de  
 Nicomede, qui auroit pour asymptote la ligne  
 ET, & pour pole le point F. Mais si elle étoit  
 une parabole; la courbe CMD seroit la com-  
 pagne de la Paraboloïde de Descartes (*Geom.*  
*Liv. 3.*), qui se décriroit en même-tems au-  
 dessous de la droite ET par l'intersection de  
 FP avec l'autre moitié de la Parabole. (*Con-*  
*sultez la Note seizieme.*)

## PROPOSITION VIII.

## PROBLÈME.

27. SOIT une ligne courbe AN (*Fig. 13. Pl. 1.*)  
 qui ait pour diamètre la ligne droite AP, avec  
 un point fixe F hors de ces lignes; soit une autre  
 ligne courbe CMD telle que menant comme l'on  
 voudra, la droite FMPN, la relation de ses



parties FN, FP, FM soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné M la tangente MT.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN, qui rencontre en K le diamètre AP, & en H la tangente donnée NH; soient décrits du centre F & des intervalles FN, FP, FM de petits arcs de cercle NQ, Po, MR terminés par la droite Fn que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela posé.

Si l'on nomme les connues FK,  $s$ ; FH,  $t$ ; FP,  $x$ ; FM,  $y$ ; FN,  $z$ ; les triangles semblables PFK & poP, FMR & FPo & FNQ, HFN & NQn, mRM & MFT donneront PF

$$(x) \cdot FK(s) :: po(dx) \cdot oP = \frac{sdx}{x}. \text{ Et } FP$$

$$(x) \cdot FM(y) :: Po\left(\frac{sdx}{x}\right) \cdot MR \frac{sydx}{xx}. \text{ Et } FP$$

$$(x) \cdot FN(z) :: Po\left(\frac{sdx}{x}\right) \cdot NQ = \frac{s^2dx}{xx}. \text{ Et}$$

$$HF(t) \cdot FN(z) :: NQ\left(\frac{s^2dx}{xx}\right) \cdot Qn(-dz) =$$

$$\frac{s^2zdx}{txx}. \text{ Et } mR(dy) \cdot RM\left(\frac{sydx}{xx}\right) :: FM(y) \cdot$$

$$FT = \frac{sydy}{xx}. \text{ Or par le moyen de la différence}$$

de l'équation donnée, on trouvera une valeur de  $dy$  en  $dx$  &  $dz$ , dans laquelle mettant à la place

de  $dz$  la valeur négative  $-\frac{s^2zdx}{txx}$ , parce que  $x$

croissant,  $z$  diminue; tous les termes seront affectés

affectés par  $dx$  ; de sorte que cette valeur étant enfin substituée dans  $\frac{syydx}{xxdy}$ , les  $dx$  se détruiront.

Et partant la valeur de  $FT$  sera exprimée en termes connus & délivrés des différences.

Si l'on supposoit que la ligne droite  $AP$  fut une ligne courbe, & qu'on menât la tangente  $PK$ , on trouveroit toujours pour  $FT$  la même valeur, & le raisonnement demeurerait le même. (*Consultez la Note dix-septieme.*)

## E X E M P L E.

28. SUPPOSONS que la ligne courbe  $AN$  (*Fig. 14. Pl. 1.*) soit un cercle qui passe par le point  $F$  (tellement situé à l'égard du diamètre  $AP$  que la ligne  $FB$  perpendiculaire à ce diamètre passe par le centre  $G$  de ce cercle), & que  $PM$  soit toujours égale à  $PN$  ; il est clair que la courbe  $CMD$ , qui devient en ce cas  $FMA$ , sera la Cissoïde de *Diocles*, & que l'on aura pour équation  $z + y = 2x$ , dont la différence est  $dy = 2dx - dz = \frac{2xxdx + syydx}{xxx}$  en mettant pour  $dz$  sa valeur —

$\frac{syydx}{xxx}$  trouvée ci-dessus (*Art. 27.*). Et partant  $FT$

$$\left( \frac{syydx}{xxdy} \right) = \frac{syy}{2xxx + syy}.$$

Si le point donné  $M$  tomboit sur le point  $A$ , les lignes  $FM$ ,  $FN$ ,  $FP$  seroient égales chacune à  $FA$ , comme aussi les droites  $FK$ ,  $FH$  ;

C

& partant on auroit en ce cas  $FT = \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$ , c'est-à-dire que si l'on prend  $FT = \frac{1}{3}AF$ , & qu'on mene la ligne  $AT$ , elle sera tangente en  $A$ .

On peut encore trouver les tangentes de la Cissoïde par le moyen de la première Proposition, en menant les perpendiculaires  $NE$ ,  $ML$  sur le diamètre  $FB$ , & cherchant l'équation qui exprime le rapport de la coupée  $FL$  à l'appliquée  $LM$ ; ce qui se fait ainsi. Ayant nommé les connues  $FB$ ,  $2a$ ;  $FL$  ou  $BE$ ,  $x$ ;  $LM$ ,  $y$ ; les triangles semblables  $FEN$ ,  $FLM$ , & la propriété du cercle donneront  $FL(x) \cdot LM(y) :: FE \cdot EN :: EN(\sqrt{2ax - xx}) \cdot EB(x)$ . D'où l'on tire  $yy = \frac{x^3}{2a - x}$ , dont la différence est  $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{2a - x^2}$ . Et partant  $LO$  (Art. 9.)  $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{yy \times 2a - x^2}{3axx - x^3} = \frac{2ax - xx}{3a - x}$ , en mettant pour  $yy$  sa valeur  $\frac{x^3}{2a - x}$ .

## PROPOSITION IX.

### PROBLÈME.

29. **S**OIENT deux lignes courbes  $ANB$ ,  $CPD$ , & une ligne droite  $FKT$ , (Fig. 15. Pl. 1.) sur lesquelles soient marqués des points fixes  $A$ ,  $C$ ,  $F$ ; soit de plus une autre ligne courbe  $EMG$  telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques  $M$  la droite  $FMN$ , &  $MP$  parallèle à  $FK$ ; la relation de l'arc  $AN$  à l'arc  $CP$  soit exprimée par

une équation quelconque. Il faut d'un point donné M sur la courbe EG mener la tangente MT.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallèle à FM, & par le point donné M les droites MRK, MOH parallèles aux tangentes en P & en N, on tirera Fm On infiniment proche de FMN, & mRp parallèle à MP.

Cela posé, si l'on nomme les connues FM,  $s$ ; FN,  $t$ ; MK,  $u$ ; CP  $x$ ; AN,  $y$ ; (donc Pp ou MR =  $dx$ , Nn =  $dy$ ) les triangles semblables FNn & FMO, MOm & MHT, MRm & MKT donneront FN ( $t$ ). FM ( $s$ ) :: Nn ( $dy$ ). MO =  $\frac{sdy}{t}$ . Et MR ( $dx$ ). MO ( $\frac{sdy}{t}$ ) :: MK ( $u$ ).

MH =  $\frac{sudy}{tdx}$ . Or par le moyen de la différence de l'équation donnée l'on aura une valeur de  $dy$  en termes qui seront tous affectés par  $dx$ , laquelle étant substituée dans  $\frac{sudy}{tdx}$ , les  $dx$  se détruiront; & partant la valeur de MH sera exprimée en termes entièrement connus. Ce qui donne cette construction.

Soit mené MH parallèle à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : soit tirée HT parallèle à FM, qui rencontre en T la droite FK, par où & par le point donné M soit menée la tangente cherchée MT. (Consultez la Note dix-huitième.)

## EXEMPLE.

30. **S**<sub>I</sub> l'on veut que la courbe  $ANB$  (*Fig. 16. Pl. 1.*) soit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe  $F$ ; que la courbe  $CPD$  soit le rayon  $APF$  perpendiculaire sur la droite  $FKGQTB$ , & que l'arc  $AN$  ( $y$ ) soit toujours à la droite  $AP$  ( $x$ ), comme le quart de cercle  $ANB$  ( $b$ ) au rayon  $AF$  ( $a$ ); la courbe  $EMG$  deviendra la quadratrice  $AMG$  de *Dinoftrate*, & l'on aura  $MH \left( \frac{sdy}{idx} \right) = \frac{asdy - sxdy}{adx}$ , puisque  $FP$  ou  $MK$  ( $u$ )  $= a - x$ , &  $FN$  ( $t$ )  $= a$ . Mais l'analogie supposée donne  $ay = bx$ , &  $ady = bdx$ . Mettant donc dans la valeur de  $MH$  à la place de  $x$  & de  $dy$  leurs valeurs  $\frac{ay}{b}$  &  $\frac{bdx}{a}$ , on trouvera  $MH = \frac{bs - sy}{a}$ . Ce qui donne cette construction.

Soit menée  $MH$  perpendiculaire sur  $FM$ , & égale à l'arc  $MQ$  décrit du centre  $F$ , & soit tirée  $HT$  parallèle à  $FM$ ; je dis que la ligne  $MT$  sera tangente en  $M$ . Car à cause des secteurs semblables  $FN B$ ,  $FM Q$ , l'on aura  $FN$  ( $a$ ).  $FM$  ( $s$ ) ::  $NB$  ( $b - y$ ).  $MQ = \frac{bs - sy}{a}$ .

## COROLLAIRE.

31. **S**<sub>I</sub> l'on veut déterminer le point  $G$  où la quadratrice  $AMG$  rencontre le rayon  $FB$ , (*Fig. 17. Pl. 1.*) on imaginera un autre rayon  $Fgb$  infiniment proche de  $FG B$ ; & en menant  $gf$

parallèle à  $FB$ , la propriété de la quadratrice & les triangles semblables  $FBb$ ,  $gfF$  rectangles en  $B$  & en  $f$ , donneront  $AB \cdot AF :: Bb \cdot Ff :: FB$  ou  $AF \cdot gf$  ou  $FG$ . D'où l'on voit que si l'on prend une troisieme proportionnelle au quart de cercle  $AB$  & au rayon  $AF$ , elle sera égale à  $FG$ , c'est-à-dire que  $FG = \frac{a^2}{b}$ . Ce qui donne lieu d'abréger la construction des tangentes.

Car menant  $TE$  parallèle à  $MH$ , (*Fig. 16. Pl. 1.*) les triangles semblables  $FMK$ ,  $FTE$  donneront  $MK (a - x) \cdot MF (s) :: ET$  ou  $MH (\frac{bs - sy}{a}) \cdot FT = \frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$ . En mettant pour  $x$  la valeur  $\frac{ay}{b}$ , & divisant ensuite le tout par  $b - y$ ; d'où il est clair que la ligne  $FT$  est troisieme proportionnelle à  $FG$  & à  $FM$ . (*Consultez la Note dix-neuvieme.*)

## PROPOSITION X.

## PROBLÈME.

32. **S**OIT une ligne courbe  $AMB$  (*Fig. 18. Pl. 2.*) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  aux foyers  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , &c. les droites  $MF$ ,  $MG$ ,  $MH$ , &c. leur relation soit exprimée par une équation quelconque : & soit proposé de mener du point donné  $M$  la perpendiculaire  $MP$  sur la tangente en ce point.

Ayant pris sur la courbe  $AB$  l'arc  $Mm$  infiniment petit, & mené les droites  $FR^m$ ,  $GmS$ ,

$HmO$ , on décrira des centres  $F, G, H$  les petits arcs de cercles  $MR, MS, MO$ ; ensuite du centre  $M$  & d'un intervalle quelconque on décrira de même le cercle  $CDE$  qui coupe les lignes  $MF, MG, MH$  aux points  $C, D, E$ , d'où l'on abaissera sur  $MP$  les perpendiculaires  $CL, DK, EI$ . Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles rectangles  $MRm, MLC$  sont semblables; car en ôtant des angles droits  $LMm, RMC$  l'angle commun  $LMR$ , les restes  $RMm, LMC$  seront égaux, & de plus ils sont rectangles en  $R$  &  $L$ . On prouvera de même que les triangles rectangles  $MSm$  &  $MKD, MOm$  &  $MIE$  sont semblables. Partant, puisque l'hypothénuse  $Mm$  est commune aux petits triangles  $MRm, MSm, MOm$ , & que les hypothénuses  $MC, MD, ME$  des triangles  $MLC, MKD, MIE$  sont égales entr'elles; il s'ensuit que les perpendiculaires  $CL, DK, EI$  ont le même rapport entr'elles que les différences  $Rm, Sm, Om$ .

2°. Que les lignes, qui partent des foyers situés du même côté de la perpendiculaire  $MP$ , croissent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18.  $FM$  croît de sa différence  $Rm$ , pendant que les autres  $GM, HM$  diminuent de leurs  $Sm, Om$ .

Si l'on suppose à présent, pour fixer ses idées, que l'équation qui exprime la relation des droites  $FM(x), GM(y), HM(z)$ , soit  $ax + xy - zz = 0$ , dont la différence est  $adx + ydx + xdy - 2zdz = 0$ ; Il est évident que la tangente en

M ( qui n'est autre chose que la continuation du petit côté  $Mm$  du poligone que l'on conçoit ( *Art. 3.* ) composer la courbe  $AMB$  ) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ses points quelconques  $m$  des parallèles  $mR$ ,  $mS$ ,  $mO$  aux droites  $FM$ ,  $GM$ ,  $HM$ , terminées en  $R$ ,  $S$ ,  $O$  par des perpendiculaires  $MR$ ,  $MS$ ,  $MO$  à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation  $\frac{a+y}{x} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = 0$  : ou ( ce qui revient au même, en mettant à la place de  $Rm$ ,  $Sm$ ,  $Om$  leurs proportionnelles  $CL$ ,  $DK$ ,  $EI$  ) que la perpendiculaire  $MP$  à la courbe doit être placée, en sorte que  $\frac{a+y}{x} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = 0$ . Ce qui donne cette construction.

Que l'on conçoive que le point  $C$  ( *Fig. 18. 19. Pl. 2.* ) soit chargé du poids  $a+y$  qui multiplie la différence  $dx$  de la droite  $FM$  sur laquelle il est situé, & de même le point  $D$  du poids  $x$ , & le point  $E$  pris de l'autre côté de  $M$  par rapport au foyer  $H$  ( parce que le terme  $- 2z dx$  est négatif ) du poids  $2z$ . Je dis que la droite  $MP$  qui passe par le commun centre de pesanteur des poids supposés en  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , sera la perpendiculaire requise. Car il est clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui passe par le centre de pesanteur de plusieurs poids, les sépare, en sorte que les poids d'une part multipliés chacun par sa distance de cette droite, sont précisément égaux aux poids de l'autre part multipliés aussi chacun par sa distance de cette même droite. Donc posant le cas que  $x$  croît



sant,  $y$  &  $z$  croissent aussi, c'est-à-dire, que les foyers  $F$ ,  $G$ ,  $H$  (*Fig. 19. Pl. 2.*) tombent du même côté de  $MP$ , comme l'on suppose toujours en prenant la différence de l'équation donnée selon les règles prescrites; il s'ensuit que la ligne  $MP$  laissera d'une part les poids en  $C$  &  $D$ , & de l'autre le poids en  $E$ , & qu'ainsi l'on aura  $\overline{a+y \times CL + x \times DK - 2z \times EI} = 0$ , qui étoit l'équation à construire.

Or je dis maintenant que puisque la construction est bonne dans ce cas, elle le sera aussi dans tous les autres; car supposant, par exemple, que le point  $M$  change de situation dans la courbe, enforte que  $x$  croissant,  $y$  &  $z$  diminuent, c'est-à-dire, que les foyers  $G$ ,  $H$  (*Fig. 18. Pl. 2.*) passent de l'autre côté de  $MP$ , il s'ensuit 1°. (*Art. 8.*) Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les signes des termes affectés par  $dy$ ,  $dz$ , ou par leurs proportionnelles  $DK$ ,  $EI$ ; de sorte que l'équation à construire sera dans ce nouveau cas  $\overline{a+y \times CL - x \times DK + 2z \times EI} = 0$ . 2°. Que les poids en  $D$  &  $E$  changeront de côté par rapport à  $MP$ ; & qu'ainsi l'on aura par la propriété du centre de pesanteur  $\overline{a+y \times CL - x \times DK + 2z \times EI} = 0$ , qui est l'équation à construire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas possibles, il s'ensuit, &c.

Il est évident que le même raisonnement subsistera toujours, tel que soit le nombre des foyers, & telle que puisse être l'équation donnée; de sorte que l'on peut énoncer ainsi la construction générale.

Soit prise la différence de l'équation donnée dont je suppose que l'un des membres soit zéro , & soit décrit à discrétion du centre M un cercle C D E qui coupe les droites MF , MG , MH aux points C , D , E , dans lesquels soient conçus des poids qui ayent entr'eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes sur lesquelles ils sont situés. Je dis que la ligne MP qui passe par leur commun centre de pesanteur , sera la perpendiculaire requise. Il est à remarquer que si l'un des poids est négatif dans la différence de l'équation donnée , il le faut concevoir de l'autre côté du point M par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers F , G , H ( *Fig. 20. Pl. 2.* ) soient des lignes droites ou courbes sur qui les droites MF , MG , MH tombent à angles droits , la même construction aura toujours lieu. Car menant du point *m* pris infiniment près de M les perpendiculaires *mf* , *mg* , *mh* sur les foyers , & du point M les petites perpendiculaires MR , MS , MO sur ces lignes ; il est clair que R*m* sera la différence de MF , puisque les droites MF , R*f* étant perpendiculaires entre les parallèles F*f* , MR , elles seront égales , & de même que S*m* est la différence de MG , & O*m* celle de MH ; & on prouvera ensuite tout le reste comme ci-dessus.

On peut encore concevoir que les foyers F , G , H ( *Fig. 21. Pl. 2.* ) soient tous où en partie des lignes courbées qui ayent des commencemens fixes & invariables aux points F , G , H , & que la

ligne courbe  $AMB$  soit telle qu'ayant mené, par exemple, d'un de ses points quelconques  $M$  les tangentes  $MV$ ,  $MX$  & la droite  $MG$ ; la relation des lignes mixtilignes  $FVM$ ,  $HXM$  & de la droite  $GM$  soit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point  $m$  pris infiniment près de  $M$  la tangente  $mu$ , il est clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point  $V$  (puisque'elle n'est que la continuation du petit arc  $Vu$  considéré comme une petite droite); & partant que si l'on décrit du centre  $V$  le petit arc de cercle  $MR$ ;  $Rm$  sera la différence de la ligne mixtiligne  $FVM$  qui devient  $FVuRm$ . Et tout le reste se démontrera comme ci-devant. (Consultez la Note 20).

*M. Tschirnhaus a donné la première idée de ce Problème dans son Livre de la Médecine de l'esprit; M. Fatio en a trouvé ensuite une solution très-ingénieuse qu'il a fait insérer dans les Journaux d'Hollande: mais la manière dont ils l'ont conçu, n'est qu'un cas particulier de la construction générale que je viens de donner.*

#### EXEMPLE I.

33. **S**OIT  $axx + byy + czz - f^3 = 0$  (les droites  $a, b, c, f$  sont données) dont la différence est  $axdx + bydy + czdz = 0$ . C'est pourquoi concevant en  $C$  (Fig. 22. Pl. 2.) le poids  $ax$ , en  $D$  le poids  $by$ , & en  $E$  le poids  $cz$ , c'est-à-dire, des poids qui soient entr'eux comme ces rectangles; la ligne  $MP$  qui passe par leur commun

centre de pesanteur , sera perpendiculaire à la courbe au point M.

Mais si l'on mene FO parallèle à CL , & que l'on prenne le rayon MC pour l'unité , les triangles semblables MCL , MFO donneront  $FO = x \times CL$  ; & de même menant GR parallèle à DK , & HS parallèle à EI , on trouvera que  $GR = y \times DK$  &  $HS = z \times EI$  ; de sorte qu'en imaginant aux foyers F , G , H les poids  $a, b, c$  ; la ligne MP , qui passe par le centre de pesanteur des poids  $ax, by, cz$  supposés en C , D , E , passera aussi par le centre de pesanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre est un point fixe , puisque les poids en F , G , H , sçavoir  $a, b, c$  , sont des droites constantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que se trouve le point M. D'où il suit que la courbe AMB doit être telle que toutes les perpendiculaires se coupent dans le même point , c'est-à-dire , qu'elle sera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une propriété très-remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainsi.

S'il y a sur un même plan autant de poids  $a, b, c$  , &c. que l'on voudra , situés en F , G , H , &c. & que l'on décrive de leur commun centre de pesanteur un cercle AMB ; je dis qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M , les droites MF , MG , MH , &c. la somme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond , sera toujours égale à une même quantité.

## EXEMPLE II.

34. **SOIT** la courbe **AMB** (*Fig. 23. Pl. 2.*) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques **M** au foyer **F** qui est un point fixe, la droite **MF**, & au foyer **G** qui est une ligne droite la perpendiculaire **MG**; le rapport de **MF** à **MG** soit toujours le même, que de la donnée *a* à la donnée *b*.

Ayant nommé **FM**, *x*; **MG**, *y*; on aura  $x : y :: a : b$ , & partant  $ay = bx$  dont la différence est  $ady - bdx = 0$ . C'est pourquoi concevant en **C** pris au-delà de **M** par rapport à **F** le poids *b*, & en **D** (à pareille distance de **M**) le poids *a*, & menant par leur centre commun de pesanteur la ligne **MP**, elle sera la perpendiculaire requise.

Il est clair par le principe de la balance, que si l'on divise la corde **CD** au point **P**, en sorte que  $CP : DP :: a : b$ ; le point **P**, sera le centre commun de pesanteur des poids supposés en **C** & **D**.

La courbe **AMB** est une section conique; sçavoir une Parabole lorsque  $a = b$ , une Hyperbole lorsque *a* surpasse *b*, & enfin une Ellipse lorsqu'il est moindre. (*Consultez la Note 21.*)

## EXEMPLE III.

35. **SI** après avoir attaché les extrémités d'un fil **FZVMGMXYH** (*Fig. 24. Pl. 2.*) en **F** & en **H**, & avoir fiché une petite pointe en **G**, on fait tendre également ce fil par le moyen d'un

file placé en M, en sorte que les parties F Z V, H Y X soient roulées autour des courbes qui ont leur origine en F & H, que la partie M G soit double, c'est-à-dire, qu'elle soit repliée en G, & que les choses demeurant en cet état l'on fasse mouvoir le file M; il est clair qu'il décrira une courbe A M B. Il est question de mener d'un point donné M sur cette courbe la perpendiculaire M P, la position du fil qui sert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites M V, M X du fil sont toujours tangentes en V & X, & que si l'on nomme les lignes mixtilignes F Z V M,  $x$ ; H Y X M,  $z$ ; la droite M G,  $y$ ; & une ligne droite prise égale à la longueur du fil,  $a$ ; l'on aura toujours  $x + 2y + z = a$ : d'où je connois que la courbe A M B est comprise dans la construction générale. C'est pourquoi prenant la différence  $dx + 2dy + dz = 0$ , & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids 1; je dis que la ligne M P, qui passe par le centre commun de pesanteur de ces poids, sera la perpendiculaire requise.

## PROPOSITION XI.

## PROBLEME.

36. SOIENT deux lignes quelconques A P B, E Q F (Fig. 25. Pl. 2.) dont l'on sçache mener les tangentes P G, Q H; & soit une ligne droite P. Q sur laquelle soit marqué un point M. Si l'on conçoit que les extrémités P, Q de cette droite

glissent le long des lignes AB, EF, il est clair que le point M décrira dans ce mouvement une ligne courbe CD. Il est question de mener d'un point donné M sur cette courbe la tangente MT.

Ayant imaginé que la droite mobile PMQ soit parvenue dans la situation infiniment proche  $pmq$ , on tirera les petites droites PO, MR, QS perpendiculaires sur PQ, ce qui formera les petits triangles rectangles  $pOP$ ,  $mRM$ ,  $qSQ$ ; & ayant pris PK égale à MQ, on menera la droite HKG perpendiculaire sur PQ, & l'on prolongera OP en T, où je suppose qu'elle rencontre la tangente cherchée MT. Cela posé, il est clair que les petites droites  $Op$ ,  $Rm$ ,  $Sq$  seront égales entr'elles, puisque par la construction PM & MQ sont par tout les mêmes.

Ayant nommé les connues PM ou KQ,  $a$ ; MQ ou PK,  $b$ ; KG,  $f$ ; KH,  $g$ ; & la petite droite  $Op$  ou  $Rm$  ou  $Sq$ ,  $dy$ ; les triangles semblables PKG &  $pOP$ , QKH &  $qSQ$  donneront  $PK(b) \cdot KG(f) :: pO(dy) \cdot OP = \frac{f dy}{b}$ . Et  $QK(a) \cdot KH(g) :: qS(dy) \cdot SQ = \frac{g dy}{a}$ . Or l'on sçait par la Géométrie commune que

$$MR = \frac{OP \times NQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{f dy + g dy}{a + b}.$$

Ainsi les triangles semblables  $mRM$ ,  $MPT$  donneront

$$mR(dy) \cdot RM\left(\frac{f dy + g dy}{a + b}\right) :: MP(a) \cdot PT =$$

$\frac{af + ag}{a + b}$ . Ce qu'il falloit trouver. (Consultez la Note vingt-deuxieme.)

## PROPOSITION XII.

## PROBLEME.

37. SOIENT deux lignes quelconques BN, FQ (Fig. 26. Pl. 2.) qui aient pour axes les droites BC, ED qui s'entre-coupent à angles droits au point A; & soit une ligne courbe LM telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M les droites MGQ, MPN parallèle à AB, AE; la relation des espaces EGQF (le point E est un point fixe donné sur la droite AE, & la ligne EF est parallèle à AC) APND, & les droites AP, PM, PN, GQ, soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de mener d'un point donné M sur la courbe LM, la tangente MT.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM,  $x$ ; PM ou AG,  $y$ ; PN,  $u$ ; GQ,  $z$ ; l'espace EGQF,  $s$ ; l'espace APND,  $t$ ; & les sous-tangentes données PH,  $a$ ; GK,  $b$ ; l'on aura Pp ou NS ou MR =  $dx$ , Gg ou Rm ou OQ =  $-dy$ ; Sn =  $-du = \frac{udx}{a}$ , à cause des triangles

semblables HPN, NSn; Oq =  $dz = -\frac{zdy}{b}$ ,

NPpn =  $dt = udx$ , & QGgq =  $ds = -zdy$ ;

où l'on doit observer que les valeurs de Rm & Sn sont négatives, parce que AP ( $x$ ) croissant, PM ( $y$ ) & PN ( $u$ ) diminuent. Cela posé, on prendra la différence de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de  $dt$ ,  $ds$ ,  $du$ ,  $dz$

leurs valeurs  $udx$ ,  $-zdy$ ,  $-\frac{udx}{a}$ ,  $-\frac{zdy}{b}$ ; ce



qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de  $dy$  à  $dx$ , ou de MP à PT.

## EXEMPLE I.

38. SOIT  $s + z\zeta = t + ux$ , on aura en prenant les différences  $ds + z\zeta dz = dt + udx + xdu$ , & mettant à la place de  $ds$ ,  $dt$ ,  $d\zeta$ ,  $du$  leurs valeurs, on trouvera  $-zdy - \frac{z\zeta dy}{b} = 2udx - \frac{uxdx}{a}$ , d'où l'on tire  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = \frac{2ay\zeta\zeta + aybz\zeta}{bux - 2abu}$ .

## EXEMPLE II.

39. SOIT  $s = t$ , donc  $ds = dt$ , c'est-à-dire,  $-zdy = udx$ , & partant  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = -\frac{y\zeta}{u}$ . Or comme cette quantité est négative, il s'ensuit (*Art. 10.*) que l'on doit prendre le point  $\Gamma$  du côté opposé au point A origine des  $x$ . Si l'on suppose que la ligne FQ soit une hyperbole qui ait pour asymptotes les droites AC, AE, en sorte que  $GQ(\zeta) = \frac{cc}{y}$ , & que la ligne BND soit une droite parallèle à AB, de manière que PN( $u$ ) soit par tout égale à la droite donnée  $c$ ; il est clair que la courbe LM a pour asymptote la droite AB, & que sa soutangente PT  $\left( -\frac{y\zeta}{u} \right) = -c$ : c'est-à-dire qu'elle demeure par tout la même.

La courbe LM est appelée dans ce cas *Logarithmique*. (*Consultez la Note vingt-troisième.*)

PROPOSITION

## PROPOSITION XIII.

## PROBLÈME.

40. **S**OIENT deux lignes quelconques  $BN$ ,  $FQ$  (Fig. 27. Pl. 2.) qui aient pour axe la même droite  $BA$ , sur laquelle soient marqués deux points fixes  $A$ ,  $E$ ; soit une troisième ligne courbe  $LM$  telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques  $M$  la droite  $AN$ , décrit du centre  $A$  l'arc de cercle  $MG$ , & tiré  $GQ$  parallèle à  $EF$ , perpendiculaire sur  $AB$ ; la relation des espaces  $EGQF(s)$ ,  $ANB(t)$ , & des droites  $AM$  ou  $AG(y)$ ,  $AN(z)$ ,  $GQ(u)$ , soit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné  $M$  sur la courbe  $LM$  la tangente  $MT$ .

Après avoir mené la droite  $ATH$  perpendiculaire sur  $AMN$ , soit imaginé une autre droite  $Amn$  infiniment proche de  $AMN$ , un autre arc  $mg$ , une autre perpendiculaire  $gq$ , & décrit du centre  $A$  le petit arc  $NS$ : on nommera les soutangentes données  $AH$ ,  $a$ ;  $GK$ ,  $b$ ; & on aura  $Rm$  ou  $Gg = dy$ ,  $Sn = dz$ ; les triangles semblables  $HAN$  &  $NSn$ ,  $KGQ$  &  $QOq$ , donneront aussi  $SN = \frac{adz}{z}$ ,  $Oq = -du = \frac{udy}{b}$ ,  $GQqg = -ds = udy$ ,  $ANn$  ou  $AN \times \frac{r}{z}$   $NS = -dt = \frac{1}{z}adz$ . On mettra toutes ces valeurs dans la différence de l'équation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera

D

une valeur de  $dz$  en  $dy$ . Or à cause des secteurs & des triangles semblables  $AN S$  &  $AMR$ ,  $mRM$  &  $MAT$ , on trouve  $AN(z) : AM(y) :: NS \left( \frac{adz}{z} \right) : MR = \frac{aydz}{zz}$ . Et  $mR(dy) : RM \left( \frac{aydz}{zz} \right) :: AM(y) : AT = \frac{ayydz}{zzdy}$ . Si donc l'on met dans cette formule à la place de  $dz$  sa valeur en  $dy$ , les différences se détruiront, & la valeur de la soutangente cherchée  $AT$  sera exprimée en termes entièrement connus. Ce qu'il falloit trouver.

## EXEMPLE I.

41. **S**OIT  $uy - s = xz - t$ , dont la différence est  $udy + ydu - ds = xzdz - dt$ , ce qui donne (après la substitution faite)  $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$  ;

& en mettant cette valeur dans  $\frac{ayydz}{zzdy}$ , on trouve

$$AT = \frac{4abuyy - 2aay^3}{4bz^3 + abz^2}.$$

## EXEMPLE II.

42. **S**OIT  $s = 2t$ , donc  $ds = 2dt$ , c'est-à-dire,  $-udy = -adz$ , ou  $dz = \frac{udy}{a}$  ; & partant  $AT$

$$\left( \frac{ayydz}{zzdy} \right) = \frac{uyy}{zz}.$$

Si la ligne  $BN$  est un cercle qui ait pour centre le point  $A$ , & pour rayon la droite  $AB = AN = c$ , & que  $FQ$  soit une hyperbole, telle que  $GQ(u) = \frac{ff}{y}$  ; il est clair que la courbe  $LM$  fait une

infinité de retours autour du centre A, avant que d'y parvenir (puisque l'espace FEGQ devient infini, lorsque le point G tombe en A), & que  $AT = \frac{ffy}{cc}$ . D'où l'on voit que la raison de AM à AT est constante; & partant que l'angle AMT est est par tout le même.

La courbe LM est appelée en ce cas *Logarithmique spirale*. (Consultez la Note vingt-quatrième.)

## PROPOSITION XIV.

## PROBLÈME.

43. SOIENT sur un même plan deux courbes quelconques AMD, BMC (Fig. 28. Pl. 2.) qui se touchent en un point M, & soit sur le plan de la courbe BMC un point fixe L. Si l'on conçoit à présent que la courbe BMC roule sur la courbe AMD en s'y appliquant continuellement, en sorte que les parties révolues AM, BM soient toujours égales entr'elles; il est visible que le plan BMC emportant le point L, ce point décrira dans ce mouvement une espèce de roulette ILK. Cela posé, je dis que si l'on mene dans chaque différente position de la courbe BMC (du point décrivant L au point touchant M) la droite LM; elle sera perpendiculaire à la courbe ILK.

Car imaginant sur les deux courbes AMD, BMC deux parties  $Mm$ ,  $Mm$  égales entr'elles & infiniment petites, on les pourra considérer (Art. 3.) comme deux petites droites qui font au point M un angle infiniment petit. Or afin

que le petit côté  $Mm$  de la courbe ou polygone  $BMC$  tombe sur le petit côté  $Mm$  du polygone  $AMD$ , il faut que le point  $L$  décrive autour du point touchant  $M$  comme centre un petit arc  $Ll$ . Il est donc évident que ce petit arc fera partie de la courbe  $ILK$ ; & par conséquent que la droite  $ML$ , qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur la courbe  $ILK$  au point  $L$ . Ce qu'il falloit prouver.

## PROPOSITION XV.

## PROBLÈME.

44. **SOIT** un angle rectiligne quelconque  $MLN$ , (Fig. 29. Pl. 2.) dont les côtés  $LM$ ,  $LN$  touchent deux courbes quelconques  $AM$ ,  $BN$ . Si l'on fait glisser ces côtés autour de ces courbes, en sorte qu'ils les touchent continuellement; il est clair que le sommet  $L$  décrira dans ce mouvement une courbe  $ILK$ . Il est question de mener une perpendiculaire  $LC$  sur cette courbe, la position de l'angle  $MLN$  étant donnée.

Soit décrit un cercle qui passe par le sommet  $L$ , & par les points touchans  $M$ ,  $N$ ; soit menée par le centre  $C$  de ce cercle la droite  $CL$ : je dis qu'elle sera perpendiculaire à la courbe  $ILK$ .

Car considérant les courbes  $AM$ ,  $BN$  comme des polygones d'une infinité de côtés, tels que  $Mm$ ,  $Nn$ ; il est évident que si l'on fait glisser les côtés  $LM$ ,  $LN$ , de l'angle rectiligne  $MLN$ , qu'on suppose demeurer toujours le même, autour des points fixes  $M$ ,  $N$ , (on considère les tangentes

LM, LN comme la continuation des petits côtés  $Mf$ ,  $Ng$ ) jusqu'à ce que le côté LM de l'angle tombe sur le petit côté  $Mm$  du polygone AM & l'autre côté LN sur le petit côté  $Nn$  du polygone BN; le sommet L décrira une petite partie  $Ll$  de l'arc de cercle MLN, puisque par la construction cet arc est capable de l'angle donné MLN. Cette petite partie  $Ll$  sera donc commune à la courbe ILK; & par conséquent la droite CL, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur cette courbe au point L. Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XVI.

## PROBLÈME.

45. SOIT ABCD (Fig. 32. Pl. 3.) une corde parfaitement flexible à laquelle soient attachés différens poids A, B, C, &c. qui aient entr'eux tels intervalles AB, BC, &c. que l'on voudra. Si l'on traîne cette corde sur un plan horizontal par l'extrémité D, le long d'une courbe donnée DP; il est clair que ces poids se disposeront, en sorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront ensuite des courbes AM, BN, CO, &c. On demande la manière d'en tirer les tangentes, la position de la corde ABCD étant donnée avec la grandeur des poids.

Dans le premier instant que l'extrémité D avance vers P, les poids A, B, C, décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$  des polygones qui composent les courbes

D 3

AM, BN, CO ; & par conséquent il ne faut pour en mener les tangentes AB, BG, CK, que déterminer la direction des poids, A, B, C dans ce premier instant, c'est-à-dire, la position des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1°. Que le poids A est tiré dans ce premier instant suivant la direction AB ; & comme il n'y a aucun obstacle qui s'oppose à cette direction, puisqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit suivre ; & partant la droite AB sera la tangente en A de la courbe A M.

2°. Que le poids B est tiré suivant la direction BC ; mais parce qu'il traîne après lui le poids A qui n'est pas dans cette direction, & qui doit par conséquent y apporter quelque changement, le poids B n'aura pas sa direction suivant BC, mais suivant une autre droite BG, dont il faut trouver la position. Ce que je fais ainsi.

Je décris sur BC comme diagonale le rectangle EF, dont le côté BF est sur AB prolongée ; & supposant que la force avec laquelle le poids B est tiré suivant BC, s'exprime par BC, il est visible par les règles de la Mécanique, que cette force BC se peut partager en deux autres BE & BF, c'est-à-dire, que le poids B étant tiré suivant la direction BC par la force BC, c'est la même chose que s'il étoit tiré en même tems par la force BE suivant la direction BE, & par la force BF suivant la direction BF. Or le poids A ne s'oppose point à la direction BE, puisqu'elle lui est per-

pendiculaire ; & par conséquent la force BE suivant cette direction demeure toute entière : mais il s'oppose avec toute sa pesanteur à la direction BF. Afin donc que le poids B avec la force BF vainque la résistance du poids A , il faut que cette force se distribue dans ces poids à proportion de leurs masses ou grandeurs : c'est pourquoi si l'on divise EC au point G , en sorte que CG soit à GE comme le poids A au poids B ; il est clair que EG exprimera la force restante avec laquelle le poids B tend à se mouvoir suivant la direction BF , après avoir vaincu la résistance du poids A. Il est donc évident que le poids B est tiré en même tems par la force BE suivant la direction BE , & par la force EG suivant la direction BF ou EC ; & partant qu'il tendra à aller par BG avec la force BG : c'est à-dire , que BG sera sa direction , & par conséquent tangente en B de la courbe BN.

3°. Pour avoir la tangente CK , je forme sur CD comme diagonale le rectangle HI , dont le côté CI est sur BC prolongée ; & je vois que le poids B ne résiste point à la force CH avec laquelle le poids C est tiré suivant la direction CH , mais bien à la force CI avec laquelle il est tiré suivant la direction CI , & de plus que le poids A résiste aussi à cette force. Pour sçavoir de combien , je tire AL perpendiculaire sur CB prolongée du côté de B , & je remarque que si AB exprime la force avec laquelle le poids A est tiré suivant la direction AB , BL exprimera celle avec



laquelle ce même poids A est tiré suivant la direction BC ; de sorte que le poids C avec la force CI doit vaincre le poids entier B , & de plus une partie du poids A qui est à ce poids A comme BL est à BA , ou BF à BC. Si donc l'on fait  $B + \frac{A \times BF}{BC}$ . C :: DK . KH , il est clair que CK fera la direction du poids C , & par conséquent la tangente en C de la troisieme courbe CO.

Si le nombre des courbes étoit plus grand , on trouveroit de la même maniere la tangente de la quatrieme , cinquieme , &c. Et si l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids , on les trouveroit par l'art. 36. (*Voyez la Note 25.*).



## SECTION III.

*Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis.*

## DÉFINITION I.

**S**OIT une ligne courbe MDM (Fig. 30. 31. 33. 34. Pl. 2. & 3.) dont les appliquées PM, ED, PM soient parallèles entre'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissant continuellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un certain point E, après lequel elle croisse. Cela posé.

La ligne ED sera nommée *la plus grande ou la moindre appliquée.*

## DÉFINITION II.

Si l'on propose une quantité telle que PM, qui soit composée d'une ou de plusieurs indéterminées telles que AP, laquelle AP croissant continuellement, cette quantité PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour AP, une valeur AE telle que la quantité ED qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité PM semblablement formée de AP. Cela s'appelle une question *De maximis & minimis.*

# ANALYSE

## PROPOSITION

### GÉNÉRALE.

46. **L**A nature de la ligne courbe  $MDM$  étant donnée ; trouver pour  $AP$  une valeur  $AE$  telle que l'appliquée  $ED$  soit la plus grande ou la moindre de ses semblables  $PM$ .

Lorsque  $AP$  croissant ,  $PM$  croît aussi ; il est évident ( *Art. 8. 10.* ) que la différence  $Rm$  sera positive par rapport à celle de  $AP$  ; & qu'au contraire lorsque  $PM$  diminue , la coupée  $AP$  croissant toujours , la différence sera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement , ne peut devenir de positive négative , qu'elle ne passe par l'infini ou par le zero ; sçavoir par le zero lorsqu'elle va d'abord en diminuant , & par l'infini lorsqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il suit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre* , doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe  $MDM$  étant donnée , on trouvera ( *Seçt. 1. ou 2.* ) une valeur de  $Rm$  , laquelle étant égale d'abord à zero , & ensuite à l'infini , servira à découvrir la valeur cherchée de  $AE$  dans l'une ou l'autre de ces suppositions.

### REMARQUE.

47. **L**A tangente en  $D$  ( *Fig. 30. 31. Pl. 2.* ) est parallèle à l'axe  $AB$  , lorsque la différence  $Rm$  devient nulle dans ce point ; mais lorsqu'elle devient infinie , la tangente se confond avec l'appli-

quée ED. (*Fig. 33. 34. Pl. 3.*) D'où l'on voit que la raison de  $mR$  à  $RM$ , qui exprime celle de l'appliquée à la soutangente, est nulle ou infinie sous le point D.

On conçoit aisément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de positive négative sans passer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorsqu'elle augmente, elle doive passer par l'infini. C'est pourquoi pour aider l'imagination, soient entendues des tangentes aux points M, D, M; (*Fig. 30. 31. Pl. 2.*) il est clair dans les courbes où la tangente en D est parallèle à l'axe AB, que la soutangente PT augmente continuellement à mesure que les points M, P, approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorsque AP surpasse AE, la soutangente PT devient. (*Art. 10.*) négative de positive qu'elle étoit, ou au contraire. (*Consultez la Note 26.*)

#### EXEMPLE I.

48. SUPPOSONS que  $x^3 + y^3 = axy$  ( $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $AB = a$ ) (*Fig. 35. Pl. 3.*) exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences  $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$ , &  $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = 0$ , lorsque le point P tombe sur le point cherché E, d'où l'on tire  $y = \frac{3xx}{a}$ ; & substituant cette valeur à la place de  $y$  dans l'équation  $x^3 + y^3 = axy$ , on trouve pour

**AE** une valeur  $x = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$  telle que l'appliquée **ED** sera plus grande que toutes les semblables **PM**. (*Consultez la Note vingt-septieme.*)

## EXEMPLE II.

49. **SOIT**  $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{a - x^3}$ , l'équation qui exprime la nature de la courbe **MDM**. (*Fig. 33. Pl. 3.*) On aura en prenant les différences,  $dy = -\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$  que j'égalé d'abord à zero; mais parce que cette supposition me donne  $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$  quine peut faire connoître la valeur de **AE**, j'égalé ensuite  $-\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$  à l'infini, ce qui me donne  $3\sqrt[3]{a-x} = 0$ ; d'où l'on tire  $x = a$ , qui est la valeur cherchée de **AE**. (*Consultez le Note vingt-huitieme.*)

## EXEMPLE III.

50. **SOIT** une demie roulette accourcie **AMF**, (*Fig. 36. Pl. 3.*) dont la base **BF** est moindre que la demi-circonférence **ANB** du cercle générateur qui a pour centre le point **C**. Il faut déterminer le point **E** sur le diamètre **AB**, en sorte que l'appliquée **ED** soit la plus grande qu'il est possible.

Ayant mené à discrétion l'appliquée **PM** qui coupe le demi-cercle en **N**, on concevra à l'ordinaire aux points **M**, **N**, les petits triangles **MRm**, **NSn**, & nommant les indéterminées **AP**,  $x$ ; **PN**,  $z$ ; l'arc **AN**,  $u$ ; & les données **ANB**,  $a$ ;

BF,  $b$ ; CA ou CN,  $c$ ; l'on aura par la propriété de la roulette ANB ( $a$ ), BF ( $b$ ) :: AN ( $u$ ). NM =  $\frac{bu}{a}$ . Donc PM =  $z + \frac{bu}{a}$ , & la dif-

férence Rm =  $\frac{adz + bdu}{a} = 0$  lorsque le point P

tombe au point cherché E. Or les triangles rectangles NSn, NPC sont semblables; car si l'on ôte des angles droits CNn, PNs l'angle commun CNS, les restes SNn, PNC seront égaux. Et partant CN ( $c$ ). CP ( $c - x$ ) :: Nn ( $du$ ). Sn

( $dz$ ) =  $\frac{cdu - xdu}{c}$ . Donc en mettant cette va-

leur à la place de  $dz$  dans  $adz + bdu = 0$ , on trouvera  $\frac{acdu - axdu + bcdx}{c} = 0$ , d'où l'on tirera  $x$

(qui est en ce cas AE) =  $c + \frac{bc}{a}$ .

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatrième proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la base BF, & au rayon CB, le point E sera celui qu'on cherche. (*Consultez la Note vingt-neuvième.*)

#### EXEMPLE IV.

51. COUPER la ligne donnée AB (*Fig. 35. Pl. 3.*) en un point E, en sorte que le produit du carré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même manière.

Ayant nommé l'inconnue AE,  $x$ ; & la donnée AB,  $a$ ; on aura  $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$ ,

qui doit être un *plus grand*. C'est pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée MP ( $y$ ) à la coupée AP ( $x$ ) soit exprimée par l'équation  $y = \frac{axx - x^3}{aa}$ , & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED soit la plus grande de toutes les semblables PM; ce qui donne  $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$ , d'où l'on tire  $AE(x) = \frac{2}{3}a$ .

Si l'on veut en général que  $x^m \times a - x^n$  soit un *plus grand* ( $m$  &  $n$  peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit soit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne  $mx^{m-1}dx \times a - x^n - na - x^{n-1}dx \times x^n = 0$ , d'où en divisant par  $x^{m-1} \times a - x^{n-1}dx$ , l'on tire  $am - mx - nx = 0$ , &  $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$ .

Si  $m = 2$ , &  $n = -1$ , l'on aura  $AE = 2a$ , & il faudra alors énoncer le Problème ainsi.

Prolonger la ligne donnée AB (Fig. 37. Pl. 3.) du côté de B en un point E, enforte que la quantité  $\frac{AE}{BE}$  soit un *moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM sera  $\frac{xx}{x-a} = y$ , dans laquelle si l'on suppose  $x = a$ , l'appliquée PM qui devient BC sera  $\frac{aa}{0}$ , c'est-à-dire, infinie; & supposant  $x$  infinie, l'on aura  $y = x$ , c'est-à-dire, que l'appliquée sera aussi infinie.

Si  $m = 1$ , &  $n = -2$ , l'on aura  $AE = -a$ ; d'où il suit que l'on doit énoncer le Problème alors en cette sorte.

Prolonger la droite donnée  $AB$  (*Fig. 38. Pl. 3.*) du côté de  $A$  en un point  $E$ , en sorte que la

quantité  $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$  soit plus grande que toute au-

tre quantité semblable  $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$ . (*Consultez la*

*Note trentième.*)

## EXEMPLE V.

52. LA ligne droite  $AB$  (*Fig. 39. Pl. 3.*) étant divisée en trois parties  $AC$ ,  $CF$ ,  $FB$ , il faut couper sa partie du milieu  $CF$  au point  $E$ , en sorte que le rapport du rectangle  $AE \times EB$  au rectangle  $CE \times EF$  soit moindre que tout autre rapport formé de la même manière.

Ayant nommé les données  $AC$ ,  $a$ ;  $CF$ ,  $b$ ;  $CB$ ,  $c$ ; & l'inconnue  $CE$ ,  $x$ ; l'on aura  $AE = a + x$ ,  $EB = c - x$ ,  $EF = b - x$ , & partant le rapport de  $AE \times EB$  à  $CE \times EF$  sera  $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$  qui doit être un moindre. C'est

pourquoi si l'on imagine une ligne courbe  $MDM$ , telle que la relation de l'appliquée  $PM$  ( $y$ ) à la coupée  $CP$  ( $x$ ) soit exprimée par l'équation  $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$ , la question se réduit à

trouver pour  $x$  une valeur  $CE$  telle que l'appli-



quée ED soit la moindre de toutes les semblables PM. On formera donc ( en prenant les différences , & divisant ensuite par  $adx$  ) l'égalité  $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$ , dont l'une des racines résout la question.

Si  $c = a + b$ , l'on aura  $x = \frac{1}{2} b$ . ( Consultez la Note trente-unieme. )

## EXEMPLE VI.

53. ENTRE tous les Cones qui peuvent être inscrits dans une sphère déterminer celui qui a la plus grande surface convexe.

La question se réduit à déterminer sur le diamètre AB du demi-cercle AFB ( Fig. 40. Pl. 3. ) le point E; ensorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le rectangle  $AF \times FE$  soit le plus grand de tous les semblables  $AN \times NP$ . Car si l'on conçoit que le demi-cercle AFB fasse une révolution entiere autour du diamètre AB, il est clair qu'il décrira une sphère, & que les triangles rectangles AEF, APN décriront des cones inscrits dans cette sphère, dont les surfaces convexes décrites par les cordes AF, AN, seront entr'elles comme les rectangles  $AF \times FE$ ,  $AN \times NP$ .

Soit donc l'inconnue  $AE = x$ , la donnée  $AB = a$ , on aura par la propriété du cercle  $AF = \sqrt{ax}$ ,  $EF = \sqrt{ax - xx}$ ; & partant  $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$  qui doit être un plus grand. C'est pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée PM ( $y$ ) à la coupée AP ( $x$ ) soit exprimée par l'équation

quation  $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$  ; & l'on cherchera le point E , enforte que l'appliquée ED soit plus grande que toutes les semblables PM. On aura donc en prenant la différence  $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$  ; d'où l'on tire  $AE(x) = \frac{2}{3}a$ . (*Consultez la Note trente-deuxieme.*)

## EXEMPLE VII.

54. ON demande entre tous les Parallélepipedes égaux à un cube donné  $a^3$  , & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée  $b$  , celui qui a la moindre superficie.

Nommant  $x$  un des deux côtés que l'on cherche , l'autre sera  $\frac{a^3}{bx}$  ; & prenant les plans alternatifs des trois côtés  $b$  ,  $x$  ,  $\frac{a^3}{bx}$  du parallélepède , leur somme sçavoir  $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$  sera la moitié de la superficie qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation  $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$  , l'on trouvera en prenant la différence  $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = 0$  , d'où l'on tire  $xx = \frac{a^3}{b}$  , &  $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$  ; de sorte que les trois côtés du parallélepède qui satisfait à la question , seront le premier  $b$  , le second  $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$  ,

E

& le troisieme  $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ . D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit , sont égaux entr'eux. (*Consultez la Note trente-troisieme.*)

## EXEMPLE VIII.

55. ON demande présentement entre tous les Parallélepipedes qui sont égaux à un cube donné  $a^3$ , celui qui a la moindre superficie.

Nommant  $x$  un des côtés inconnus , il est clair par l'exemple précédent, que les deux autres côtés seront chacun  $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$ ; & partant la somme des plans alternatifs qui est la moitié de la superficie , fera  $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}$  qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi la différence  $-\frac{a^3 dx}{xx} + \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x}} = 0$ , d'où l'on tire  $x = a$ ; & par conséquent les deux autres côtés seront aussi chacun  $= a$ ; de sorte que le cube même donné satisfait à la question.

## EXEMPLE IX.

56. LA ligne AEB (*Fig. 41. Pl. 3.*) étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP ( $u$ ), PF ( $z$ ); soit donnée une quantité composée de ces indéterminées  $u$  &  $z$ , & de telles autres droites données  $a, b$ ; &c. qu'on voudra. On demande qu'elle doit être la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée,

soit plus grande ou moindre que cette quantité , lorsqu'elle est composée des droites  $CP$  ,  $PF$ .

Supposons que les lignes  $CE$  ,  $EF$  aient la position requise ; & ayant joint  $CF$  , concevons une ligne courbe  $DM$  , telle qu'ayant mené à discrétion  $PQM$  perpendiculaire sur  $CF$  , l'appliquée  $QM$  exprime la quantité donnée : il est clair que le point  $P$  tombant au point  $E$  , l'appliquée  $QM$  qui devient  $OD$  , doit être la moindre ou la plus grande de toutes ses semblables. Il faudra donc que sa différence soit alors égale à zero ou à l'infini : c'est pourquoi si la quantité donnée est , par exemple ,  $au + \xi z$  , l'on aura  $a du + 2 z dz = 0$  , & par conséquent  $du : - dz :: 2 z . a$ . D'où l'on voit déjà que  $dz$  doit être négative par rapport à  $du$  ; c'est-à-dire , que la position des droites  $CE$  ,  $EF$  doit être telle que  $u$  croissant ,  $z$  diminue.

Maintenant si l'on mène  $EG$  perpendiculaire à la ligne  $AEB$  , & d'un de ses points quelconques  $G$  les perpendiculaires  $GL$  ,  $GI$  sur  $CE$  ,  $EF$  ; & qu'ayant tiré par le point  $e$  pris infiniment près de  $E$  , les droites  $CKe$  ,  $FeH$  , on décrive des centres  $C$  ,  $F$  les petits arcs de cercle  $EK$  ,  $EH$  : on formera les triangles rectangles  $ELG$  &  $EKe$  ,  $EIG$  &  $EHe$  , qui seront semblables entr'eux ; car si l'on ôte des angles droits  $GEe$  ,  $LEK$  le même angle  $LEe$  , les restes  $LEG$  ,  $KEe$  seront égaux ; on prouvera de même que les angles  $IEG$  ,  $HEe$  seront égaux. On aura donc  $GL . GI$

::  $Ke (du)$ .  $He (-dz)$  ::  $2z \cdot a$ . D'où il suit que la position des droites  $CE$ ,  $EF$  doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire  $EG$  sur la ligne  $AEB$ ; le sinus  $GL$  de l'angle  $GEC$  soit au sinus  $GI$  de l'angle  $GEF$ , comme les quantités qui multiplient  $dz$  sont à celles qui multiplient  $du$ . Ce qu'il falloit trouver. (*Consultez la Note trente-quatrième.*).

## C O R O L L A I R E.

57. **S**I l'on veut à présent que la droite  $CE$  soit donnée de position & de grandeur, que la droite  $EF$  le soit de grandeur seulement, & qu'il faille trouver sa position, il est clair que l'angle  $GEC$  étant donné, son sinus  $GL$  le sera aussi, & par conséquent le sinus  $GI$  de l'angle cherché  $GEF$ . Donc si l'on décrit un cercle du diamètre  $EG$ , & que l'on porte la valeur de  $GI$  sur sa circonférence de  $G$  en  $I$ ; la droite  $EF$  qui passe par le point  $I$  aura la position requise.

Soit  $au + bz$  la quantité donnée; on trouvera  $GI = \frac{a \times GL}{b}$ ; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne à  $EC$  & à  $EF$ , la position de cette dernière sera toujours la même, puisqu'elles n'entrent point dans la valeur de  $GI$ , qui par conséquent ne change point. Si  $a = b$ , il est clair que la position de  $EF$  doit être sur  $CE$  prolongée du côté de  $E$ ; puisque  $GL = GI$ , lorsque les points  $C$ ,  $F$  tombent de part & d'autre de la

ligne AEB : mais lorsqu'ils tombent du même côté , l'angle FEG (*Fig. 42. Pl. 3.*) doit être pris égal à l'angle CEG.

## E X E M P L E X.

58. **L**E cercle AEB (*Fig. 42. Pl. 3.*) étant donné de position avec les points C, F hors de ce cercle ; trouver sur sa circonférence le point E tel que la somme des droites CE, EF soit la moindre qu'il est possible.

Supposant que le point E soit celui que l'on cherche ; & menant par le centre O la ligne OEG, il est clair qu'elle sera perpendiculaire sur la circonférence AEB ; & partant (*Art. 57.*) que les angles FEG, CEG seront égaux entr'eux. Si donc l'on mène EH, en sorte que l'angle EHO soit égal à l'angle CEO, & de même EK, en sorte que l'angle EKO soit égal à l'angle FEO, & les parallèles ED, EL à OF, OC ; on formera les triangles semblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE ; & en nommant les connues OE ou OA ou OB,  $a$  ; OC,  $b$  ; OF,  $c$  ; & les inconnues OD ou LE,  $x$  ; DE ou OL,  $y$  ; l'on aura  $OH = \frac{aa}{b}$ ,  $OK = \frac{aa}{c}$ , & HD ( $x - \frac{aa}{b}$ ). DE ( $y$ ) :: KL ( $y - \frac{aa}{c}$ ). LE ( $x$ ). Donc  $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$ , qui est une équation à une hyperbole que l'on construira facilement ; & qui coupera le cercle au point cherché E.

( Consultez la Note trente-cinquieme- )

## EXEMPLE XI.

59. **U**N voyageur partant du lieu C ( Fig 43. Pl. 3. ) pour aller au lieu F , doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite A E B . On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace  $a$  dans le temps  $c$  , & dans l'autre du côté de F l'espace  $b$  dans le même tems  $c$  : on demande par quel point E de la droite A E B il doit passer , afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F . Si l'on fait  $a$  , C E (  $u$  ) : :  $c \cdot \frac{cu}{a}$  . Et  $b$  . E F (  $z$  ) : :  $c \cdot \frac{cz}{b}$  . Il est clair que  $\frac{cu}{a}$  exprime le temps que le voyageur employe à parcourir la droite C E , & de même que  $\frac{cz}{b}$  exprime celui qu'il employe à parcourir E F ; de sorte que  $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$  doit être un moindre . D'où il suit ( Art. 56. ) qu'ayant mené E G perpendiculaire sur la ligne A B ; le sinus de l'angle G E C doit être au sinus de l'angle G E F , comme  $a$  est à  $b$  .

Cela posé , si l'on décrit du point cherché E , comme centre , de l'intervalle E C , le cercle C G H , & qu'on mene sur la droite A E B les perpendiculaires C A , H D , F B , & sur C E , E F les perpendiculaires G L , G I ; l'on aura  $a . b :: G L . G I$  . Or  $G L = A E$  , &  $G I = E D$  , parce que les triangles rectangles G E L & E C A , G E I

& E H D sont égaux & semblables entr'eux, comme il est facile à prouver. C'est pourquoi si l'on nomme l'inconnue A E,  $x$ ; on trouvera E D

$= \frac{bx}{a}$  : & nommant les connues A B,  $f$ ; A C,  $g$ ; B F,  $h$ ; les triangles semblables E B F, E D H donneront E B ( $f - x$ ). B F ( $h$ ) :: E D ( $\frac{bx}{a}$ ).

DH  $= \frac{bhx}{af - ax}$ . Mais à cause des triangles rectangles E D H, E A C, qui ont leurs hypoténuses E H, E C égales, l'on aura  $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$ , c'est-à-dire, en termes analytiques,  $\frac{bbxx}{aa} +$

$\frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$  : De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra  $aax^4 - 2aafx^3 + aaffxx - 2aafggx + aaffgg = 0$ .  
 $- bb + 2bbf + aagg$   
 $- bbff$   
 $- bbhh$

On peut encore trouver cette équation de la manière qui suit, sans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues A B,  $f$ ; A C,  $g$ ; B F,  $h$ ; & l'inconnue A E,  $x$ ; on fera  $a \cdot CE (\sqrt{gg + xx}) :: c \cdot \frac{c\sqrt{gg + xx}}{a} =$  au tems que le voyageur emploie à parcourir la droite CE. Et de même  $b \cdot EF (\sqrt{ff - 2fx + xx + hh}) :: c \cdot \frac{c\sqrt{ff - 2fx + xx + hh}}{b} =$  au tems que le voya-



geur employe à parcourir la droite EF. Ce qui fera

$$\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} = \text{à un moindre ; \&}$$

partant sa différence  $\frac{cx dx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cx dx - cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}$   
 $= 0$  ; d'où l'on tire, en divisant par  $cdx$  & en ôtant les incommensurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cherche. (*Consultez la Note trente-sixieme.*)

### EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie F (*Fig. 44. Pl. 3.*) qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au-dessus de la poulie F, & qui est attachée en B, en sorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB, On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur ; & l'on demande en quel endroit le plomb D, ou la poulie F doit s'arrêter.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb D descendra le plus bas qu'il lui sera possible, au-dessous de l'horizontale CB ; d'où il suit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant les données CF,  $a$  ; DFB,  $b$  ; CB,  $c$  ; & l'inconnue CE,  $x$  ; l'on aura  $EF = \sqrt{aa-xx}$ ,  $FB = \sqrt{aa+cc-2cx}$ , &  $DFE = b - \sqrt{aa+cc-2cx} + \sqrt{aa-xx}$  qui doit être un *plus grand* ; & partant sa diffé-

rence  $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-xx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = 0$ , d'où l'on tire  
 $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$ , & divisant par  
 $x-c$ , il vient  $2cxx - aax - aac = 0$ , dont l'une  
des racines fournit pour CE une valeur telle que  
la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le  
plomb D, lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question  
d'une autre manière que voici.

Nommant EF,  $y$ ; BF,  $z$ ; l'on aura  $b$   
 $-z+y =$  à un *plus grand*; & partant  $dy = dz$ .  
Or il est clair que la poulie F décrit le cer-  
cle CFA autour du point C comme centre;  
& partant si du point  $f$  pris infiniment près de  
F, l'on mene  $fR$  parallèle à CB, &  $fS$  per-  
pendiculaire sur BF, l'on aura  $FR = dy$ , &  $FS$   
 $= dz$ . Elles seront donc égales entr'elles; & par  
conséquent les petits triangles rectangles FR $f$ ,  
FS $f$ , qui ont de plus l'hypothénuse F $f$  commune,  
seront égaux & semblables; d'où l'on voit que  
l'angle R F  $f$  est égal à l'angle S F  $f$ , c'est-à-  
dire, que le point F doit être tellement situé  
dans la circonférence FA, que les angles faits  
par les droites EF, FB sur les tangentes en F,  
soient égaux entr'eux: ou bien (ce qui revient  
au même) que les angles BFC, DFC soient  
égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, enforte que l'an-  
gle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD; les  
triangles CBF, CFH seront semblables; comme  
aussi les triangles rectangles ECF, EFH, puis-

que l'angle  $C F E$  est égal à l'angle  $F H E$ , étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux  $F H C$ ,  $C F D$ ; & par conséquent on aura  $C H = \frac{aa}{c}$ , &  $H E (x - \frac{aa}{c})$ .  $E F (y)$

::  $E F (y)$ .  $E C (x)$ . Donc  $xx - \frac{aa x}{c} = yy = aa - xx$  par la propriété du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

### EXEMPLE XIII.

61. **L'ÉLEVATION** du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuscule.

Soit  $C$  (*Fig. 45. Pl. 3.*) le centre de la sphère;  $A P T O B H Q$  le méridien;  $H D$  &  $O$  l'horifon;  $Q E$  &  $T$  le cercle crépusculaire parallèle à l'horifon;  $A M N B$  l'équateur;  $F E D G$  la portion du parallèle à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuscule, renfermée entre les plans de l'horifon & du cercle crépusculaire;  $P$  le pole austral;  $P E M$ ,  $P D N$  des quarts de cercles de déclinaison. L'arc  $H Q$  ou  $O T$  du méridien compris entre l'horifon & le cercle crépusculaire, & l'arc  $O P$  de l'élévation du pole sont donnés; & par conséquent leurs sinus droits  $C I$  ou  $F L$  ou  $Q X$ , &  $O V$ . L'on cherche le sinus  $C K$  de l'arc  $E M$  ou  $D N$  de la déclinaison du Soleil, lorsqu'il décrit le parallèle  $E D$ .

S'imaginant une autre portion  $f e d g$  d'un parallèle à l'équateur, infiniment proche de  $F E D G$ , avec les quarts de cercle  $P e m$ ,  $P d n$ ; il est clair que le tems que le Soleil

emploie à parcourir l'arc  $ED$ , devant être un *moindre*, la différence de l'arc  $MN$  qui en est la mesure, & qui devient  $mn$  lorsque  $ED$  devient  $ed$ , doit être nulle; d'où il suit que les petits arcs  $Mm$ ,  $Nn$ , & par conséquent les petits arcs  $Re$ ,  $Sd$ , seront égaux entr'eux. Or les arcs  $RE$ ,  $SD$  étant renfermés entre les mêmes parallèles  $ED$ ,  $ed$ , sont aussi égaux, & les angles en  $S$  & en  $R$  sont droits. Donc les petits triangles rectangles  $ERe$ ,  $DSd$  (que l'on considère comme rectilignes (*Art. 3.*) à cause de l'infinie petitesse de leurs côtés), seront égaux & semblables; & par conséquent les hypothénuses  $Ee$ ,  $Dd$  seront aussi égales entr'elles.

Cela posé, les droites  $DG$ ,  $EF$ ,  $dg$ ,  $ef$  commune sections des plans  $FEDG$ ,  $fedg$  parallèles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépusculaire, seront perpendiculaires sur les diamètres  $HO$ ,  $QT$ , puisque les plans de tous ces cercles seront perpendiculaires chacun sur le plan du méridien; & les petites droites  $Gg$ ,  $Ff$  seront égales entr'elles, puisque les droites  $FG$ ,  $fg$  sont parallèles. Donc  $\sqrt{Dd^2 - Gg^2}$  ou  $DG - dg = \sqrt{Ee^2 - Ff^2}$  ou  $fe - FE$ . Or il est clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que si l'on mène à discrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, sera à leur différence, comme le rayon est à la coupée depuis le centre, ce qui donne ici (à cause des cercles  $HDO$ ,  $QET$ )  $CO$ .  $CG$

$:: Dd$  ou  $Ee$ .  $DG - dg$  ou  $fe - FE :: IQ$ .  $IF$   
 $:: CO + IQ$  ou  $OX$ .  $CG + IF$  ou  $GL$ . Mais à  
 cause des triangles rectangles semblables  $CVO$ ,  
 $CKG$ ,  $FLG$ , l'on aura  $CO$ .  $CG :: OV$ .  $GK$ .  
 Et  $GK$ .  $GL :: CK$ .  $FL$  ou  $QX$ . Donc  $OV$ .  
 $CK :: OX$ .  $XQ :: XQ$ .  $XH$  par la propriété  
 du cercle : c'est-à-dire, que si l'on prend  $QX$   
 pour le rayon ou sinus total dans le triangle  
 rectangle  $QXH$ , dont l'angle  $HQX$  est de 9  
 degrés, parce que les Astronomes font l'arc  $HQ$   
 de 18 degrés, l'on aura comme le sinus total  
 est à la tangente de 9 degrés, de même le si-  
 nus de l'élevation du pole est au sinus de la  
 déclinaison australe du Soleil dans le tems du  
 plus petit crépuscule. D'où il suit que si l'on  
 ôte 0.8002875 du logarithme du sinus de l'é-  
 levation du pole; le reste sera le logarithme du  
 sinus cherché. Ce qu'il falloit trouver. ( *Con-  
 sultez la Note trente-septieme.* )



## SECTION IV.

*Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement.*

COMME l'on se servira dans la suite des différences secondes , troisiemes , &c. il est nécessaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

## DÉFINITION I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement , est appelée la *différence de la différence* de cette quantité , ou bien la *différence seconde*. Ainsi si l'on imagine une troisieme appliquée  $nq$  (Fig. 46. Pl. 3.) infiniment proche de la seconde  $mp$  , & qu'on mene  $mS$  parallele à  $AB$  , &  $mH$  parallele à  $RS$  ; on appellera  $Hn$  la *différence de la différence*  $Rm$  , ou bien la *différence seconde* de  $PM$ .

De même si l'on imagine une quatrieme appliquée  $of$  infiniment proche de la troisieme  $nq$  , & qu'on mene  $nT$  parallele à  $AB$  , &  $nL$  parallele à  $ST$  ; on appellera la différence des petites droites  $Hn$  ,  $Lo$  , la *différence de la différence seconde* , ou bien la *différence troisieme* de  $PM$ . Et ainsi des autres. (Voyez la Note 38.)

## AVERTISSEMENT.

On marquera dans la suite chaque différence par un nombre de  $d$  qui en exprime l'ordre ou le genre. Par exemple, on marquera par  $dd$  la différence seconde ou du second genre; par  $ddd$ , la différence troisième ou du troisième genre; par  $dddd$ , la différence quatrième ou du quatrième genre, & de même des autres. Ainsi  $ddy$  exprimera  $Hn$ ;  $ddy$ ,  $Lo - Hn$  ou  $Hn - Lo$ , &c.

Quant aux puissances de ces différences, on les marquera par des chiffres postérieurs mis au-dessus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entières. Par exemple, le carré, ou le cube de  $dy$  sera  $dy^2$ , ou  $dy^3$ ; le carré, ou le cube de  $ddy$  sera  $ddy^2$ , ou  $ddy^3$ ; celui de  $ddy$  sera  $dddy^2$ , ou  $dddy^3$ ; celui de  $ddddy$  sera  $ddddy^2$ , ou  $ddddy^3$ , &c. (Voyez la Note 39.)

## COROLLAIRE I.

62. SI l'on nomme chacune des coupées  $AP$ ,  $Ap$ ,  $Aq$ ,  $Af$ ,  $x$ ; chacune des appliquées  $PM$ ,  $pm$ ,  $qn$ ,  $fo$ ,  $y$ ; & chacune des portions courbes  $AM$ ,  $Am$ ,  $An$ ,  $AO$ ,  $u$ ; il est clair que  $dx$  exprimera les différences  $Pp$ ,  $pq$ ,  $qf$  des coupées;  $dy$  les différences  $Rm$ ,  $Sn$ ,  $To$  des appliquées; &  $du$  les différences  $Mm$ ,  $mn$ ,  $no$  des portions de la courbe  $AMD$ . Or afin de prendre, par exemple, la différence seconde  $Hn$  de la variable  $PM$ , il faut imaginer sur l'axe deux petites parties  $Pp$ ,  $pq$ ,

& sur la courbe deux autres  $Mm$ ,  $mn$  pour avoir les deux différences  $Rm$ ,  $Sn$ ; & partant si l'on suppose que les petites parties  $Pp$ ,  $pq$  soient égales entr'elles; il est clair que  $dx$  sera constante par rapport à  $dy$  & à  $du$ , puisque  $Pp$  qui devient  $pq$  demeure la même pendant que  $Rm$  qui devient  $Sn$ , &  $Mm$  qui devient  $mn$ , varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe  $Mm$ ,  $mn$  seroient égales entr'elles, & alors  $du$  seroit constante par rapport à  $dx$  & à  $dy$ ; & enfin si l'on supposoit que  $Rm$  &  $Sn$  fussent égales,  $dy$  seroit constante par rapport à  $dx$  & à  $du$ , & la différence  $Hn$  ( $ddy$ ) seroit nulle.

De même pour prendre la différence troisieme de  $PM$ , ou la différence de la différence seconde  $Hn$ , il faut imaginer sur l'axe trois petites parties  $Pp$ ,  $pq$ ,  $qf$ ; sur la courbe trois autres  $Mm$ ,  $mn$ ,  $no$ ; & sur les appliquées aussi trois autres  $Rm$ ,  $Sn$ ,  $To$ , & alors on aura  $dx$  ou  $du$  ou  $dy$  pour constante, selon qu'on supposera que les petites parties  $Pp$ ,  $pq$ ,  $qf$ , ou  $Mm$ ,  $mn$ ,  $no$ , ou  $Rm$ ,  $Sn$ ,  $To$  sont égales entr'elles. Il en est de même des différences quatriemes, cinquiemes, &c.

Tout ceci se doit aussi entendre des courbes  $AMD$ , (*Fig. 47. Pl. 3.*) dont les appliquées  $BM$ ,  $Bm$ ,  $Bn$  partent toutes d'un point fixe  $B$ ; car pour avoir, par exemple, la différence seconde de  $BM$ , il faut imaginer deux autres appliquées  $Bm$ ,  $Bn$  qui fassent des angles  $MBm$ ,



$mBn$  infiniment petits, & ayant décrit du centre  $B$  les petits arcs de cercle  $MR$ ,  $mS$ ; la différence des petites droites  $Rm$ ,  $Sn$ , sera la différence seconde de  $BM$ ; & l'on pourra prendre pour constants les petits arcs  $MR$ ,  $mS$ , ou les petites portions de la courbe  $Mm$ ,  $mn$ , ou enfin les petites droites  $Rm$ ,  $Sn$ . Il en va de même pour les différences troisiemes, quatriemes, &c. de l'appliquée  $BM$ .

## REMARQUE.

63. ON doit bien remarquer, 1°. Qu'il y a différens ordres d'infiniment petits : que  $Rm$ , (*Fig. 46. Pl. 3.*) par exemple, est infiniment petite par rapport à  $PM$ , & infiniment grande par rapport à  $Hz$ ; de même que l'espace  $MPpm$  est infiniment petit par rapport à l'espace  $APM$ , & infiniment grand par rapport au triangle  $MRm$ .

2°. Que la différence entière  $Pf$  est encore infiniment petite par rapport à  $AP$ ; parce que toute quantité qui est la somme d'un nombre fini de quantités infiniment petites, telles que  $Pp$ ,  $pq$ ,  $qf$  par rapport à une autre  $AP$ , demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compose, soit infini.

## COROLLAIRE II.

64. ON peut marquer en cette sorte les différences secondes dans toutes les suppositions possibles.

1°.

1°. Dans les courbes où les appliquées  $mR$ ,  $nS$  sont parallèles entr'elles, (Fig. 48. 49. Pl. 3.) on prolongera la petite droite  $Mm$  en  $H$  où elle rencontre l'appliquée  $Sn$ ; & ayant décrit du centre  $m$ , de l'intervalle  $mn$ , l'arc  $nk$ , on tirera les petites droites  $nl$ ,  $li$ ,  $kcg$  dont la première soit parallèle à  $mS$ , & les deux autres à  $Sn$ . Cela posé, si l'on veut que  $dx$  soit constante, c'est-à-dire, que  $MR$  soit égale à  $mS$ ; il est clair que le triangle  $mSH$  est semblable & égal au triangle  $MRm$ , & qu'ainsi  $Hn$  est  $ddy$ , c'est-à-dire, la différence de  $Rm$  &  $Sn$ ; &  $Hk = ddu$ . Mais si l'on suppose que  $du$  soit constante, c'est-à-dire, que  $Mm = mn$  ou à  $mk$ ; il est évident alors que le triangle  $mgk$  est semblable & égal au triangle  $MRm$ , & qu'ainsi  $kc = ddy$ , &  $Sg$  ou  $cn = ddx$ . Enfin si l'on prend  $dy$  pour constante; c'est-à-dire,  $mR = nS$ , il s'ensuit que le triangle  $mil$  est égal & semblable au triangle  $MRm$ , & qu'ainsi  $iS$  ou  $nl = ddx$ , &  $lk = ddu$ .

2°. Dans les courbes dont les appliquées  $Bm$ ,  $Bn$  partent du même point  $B$ , (Fig. 50. 51. Pl. 3.) l'on décrira du centre  $B$  les arcs  $MR$ ,  $mS$ , que l'on regardera (Art. 3.) comme de petites droites perpendiculaires sur  $Bm$ ,  $Bn$ ; & ayant prolongé  $Mm$  en  $E$ , & décrit du centre  $m$ , de l'intervalle  $mn$ , le petit arc  $nkE$ , on fera l'angle  $EmH = mBn$ , & l'on tirera les petites droites  $nl$ ,  $li$ ,  $kcg$  dont la première soit parallèle à  $mS$ , & les deux autres

F

à  $S n$ . Cela posé, à cause du triangle  $BSm$  rectangle en  $S$ , l'angle  $BmS + mBn$ , ou  $+EmH$  vaut un droit, & partant l'angle  $BmE$  vaut un droit  $+SmH$ ; il vaut aussi le droit  $MRm + RMm$ , puisqu'il est externe au triangle  $RMm$ . Donc l'angle  $SmH = RMm$ .

Il suit de ceci, 1°. Que si l'on veut que  $dx$  soit constante, c'est-à-dire que les petits arcs  $MR$ ,  $mS$  soient égaux entr'eux, le triangle  $SmH$  sera semblable & égal au triangle  $RMm$ , & qu'ainsi  $Hn = ddy$ , &  $Hk = ddu$ . 2°. Que si l'on prend  $du$  pour constante, le triangle  $gmh$  sera semblable & égal au triangle  $RMm$ , & qu'ainsi  $hc$  exprimera  $ddy$ , &  $Sg$  ou  $cn$ ,  $ddx$ . Enfin, 3°. Que si l'on prend  $dy$  pour constante, les triangles  $iml$ ,  $RMm$  seront égaux & semblables; & qu'ainsi  $iS$  ou  $ln = ddx$ , &  $lk = ddu$ .

## PROPOSITION I.

### PROBLÈME.

65. **P**RENDRE la différence d'une quantité composée de différences quelconques.

On prendra pour constante la différence que l'on voudra, & traitant les autres comme des quantités variables, on se servira des règles prescrites dans la Section première.

La différence de  $\frac{ydy}{dx}$ , en prenant  $dx$  pour constante, sera  $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$ , &  $\frac{dx dy^2 - y dy ddx}{dx^2}$  en prenant  $dy$  pour constante.

Celle de  $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ , en prenant  $dx$  pour constante, sera  $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , le tout divisé par  $dx$ , c'est-à-dire  $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ; & en prenant  $dy$  pour constante, elle sera  $dzdx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - zddx\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , le tout divisé par  $dx^2$ , c. à d.  $\frac{dzdx^2 + dzdx^2dy^2 - zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

La différence de  $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , en prenant  $dx$  pour constante, sera  $\frac{ydy^2ddy}{dy^2 + yddy\sqrt{dx^2 + dy^2}} - \frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , le tout divisé par  $dx^2 + dy^2$ , c'est-à-dire,  $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ; & en prenant  $dy$  pour constante, elle sera  $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 - ydydxddx}{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

La différence de  $\frac{dx^2 + dy^2}{dxddy}$  ou  $\frac{dx^2 + dy^2}{dxddy}^{\frac{1}{2}}$ , en prenant  $dx$  pour constante, sera  $\frac{3dx^2dyddy \times dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}} + dxddy \times dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}}{dx^2ddy^2}$ .

Mais il faut observer que dans ce dernier cas il n'est pas libre de prendre  $dy$  pour constante, car dans cette supposition la différence  $ddy$  seroit nulle, & par conséquent elle ne devoit pas se rencontrer dans la quantité proposée. (Consultez la Note 40.)

## DÉFINITION II.

Lorsqu'une ligne courbe AFK (Fig 52. 53. 54. 55. Pl. 3. 4.) est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B ; le point F qui sépare la partie concave de la convexe , & qui par conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre , est appelé point d'*inflexion* , lorsque la courbe étant parvenue en F continue son chemin vers le même côté : & point de *rebroussement* , lors qu'elle rebrousse chemin du côté de son origine.

## PROPOSITION II.

## PROBLÈME GÉNÉRAL.

66. **L**A nature de la ligne courbe AFK étant donnée , déterminer le point d'*inflexion* ou de *rebroussement* F.

Supposons en premier lieu que la ligne courbe AFK (Fig. 52. 53. Pl. 3. 4.) ait pour diamètre une ligne droite AB , & que ses appliquées PM , EF , &c. soient toutes parallèles entr'elles. Si l'on mène par le point F , l'appliquée FE avec la tangente FL ; & par un point quelconque M de la partie AF , une appliquée MP avec une tangente MT : il est clair ,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'*inflexion* , que la coupée AP croissant continuellement , la partie AT du diamètre , interceptée entre l'origine des  $x$  & la rencontre de la tangente , croît aussi jusqu'à ce que le point P tombe en E ,

après quoi elle va en diminuant ; d'où l'on voit que AT qui répond à l'appliquée en P, doit devenir un *plus grand* AL, lorsque le point P tombe sur le point cherché E.

2°. Dans celles qui ont un point de rebroussement, que la partie AT croissant continuellement, la coupée AP croît aussi jusqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant ; d'où l'on voit que AP qui répond à AT, doit devenir un *plus grand* AE, lorsque le point T tombe en L.

Or si l'on nomme AE,  $x$  ; EF,  $y$  ; l'on aura  $AL = \frac{ydx}{dy} - x$ , dont la différence, qui est  $\frac{dy^2 dx - y dx ddy}{dy^2} - dx$  (en supposant  $dx$  constante), étant divisée par  $dx$  différence de AE, doit être (Art. 47.) nulle ou infinie ; ce qui donne  $-\frac{y ddy}{dy^2} = 0$ , ou à l'infini : de sorte que multipliant par  $dy^2$ , & divisant par  $-y$ , il vient  $ddy = 0$ , ou à l'infini ; ce qui servira dans la suite de formule générale pour trouver le point d'inflexion ou de rebroussement F. Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de  $dy$  en  $dx$  ; & prenant la différence de cette valeur, en supposant  $dx$  constante, on trouvera une valeur de  $ddy$  en  $dx^2$ , laquelle étant égalee d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira dans l'une ou l'autre de ces suppositions à trouver pour AE une valeur, telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebroussement F.

L'origine A des  $x$  peut être tellement située que  $AL = x - \frac{ydx}{dy}$ , au lieu de  $\frac{ydx}{dy} - x$ , & que AL ou AE soit un *moindre* au lieu d'être un *plus grand* : mais comme la conséquence est toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas. Il est à remarquer que AL ne peut jamais être  $= x + \frac{ydx}{dy}$ , car lorsque le point T tombe de l'autre côté du point P, par rapport à l'origine A des  $x$ , la valeur de  $\frac{ydx}{dy}$  sera négative suivant l'article 10, & par conséquent celle de  $-\frac{ydx}{dy}$  sera positive, de sorte qu'on aura encore en ce cas  $AE + EL$ . ou  $AL = x - \frac{ydx}{dy}$ .

La même chose se peut encore trouver de cette autre manière. Il est clair qu'en prenant  $dx$  pour constante, & supposant que l'appliquée  $y$  augmente, Sn (Fig. 48. 49. Pl. 3.) est moindre que SH ou que Rm dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de Hn ( $ddy$ ) doit devenir de positive négative sous le point d'inflexion ou de rebroussement F : & partant (Art. 47.) qu'elle y doit être ou nulle ou infinie.

Supposons en second lieu que la courbe AFK (Fig. 54. 55. Pl. 4.) ait pour appliquées les droites BM, BF, BM, qui partent toutes d'un même point B. Si l'on mène telle appliquée BM (Fig. 56. 57. Pl. 4.) qu'on voudra, avec une

tangente  $MT$  qui rencontre  $BT$  perpendiculaire à  $BM$  au point  $T$  ; & qu'ayant pris le point  $m$  infiniment près de  $M$  , l'on tire l'appliquée  $Bm$  , la tangente  $mt$  , & la perpendiculaire  $Bt$  sur  $Bm$  , qui rencontre  $MT$  en  $O$  ; il est visible ( en supposant que l'appliquée  $BM$  , qui devient  $Bm$  , augmente ) que dans la partie concave ,  $Bt$  surpasse  $BO$  , & qu'au contraire elle est moindre dans la partie convexe ; de sorte que sous le point d'inflexion ou de rebroussement  $F$  , la valeur de  $Ot$  doit devenir de positive négative.

Cela posé , si l'on décrit du centre  $B$  ( *Fig. 56. Pl. 4.* ) les petits arcs de cercle  $MR$  ,  $TH$  , on formera les triangles semblables  $mRM$  ,  $MBT$  ,  $THO$  , & les petits secteurs semblables  $BMR$  ,  $BTH$ . Nommant donc  $BM$  ,  $y$  ;  $MR$  ,  $dx$  ; l'on aura  $mR(dy) . RM(dx) :: BM(y) . BT =$

$$\frac{ydx}{dy} :: MR(dx) . TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH\left(\frac{dx^2}{dy}\right) . HO$$

$$= \frac{dx^3}{dy^2} . \text{ Or si l'on prend la différence de } BT\left(\frac{ydx}{dy}\right)$$

$$\text{en supposant } dx \text{ constante , il vient } Bt - BT \text{ ou } Ht = \frac{dx dy^2 - y dx dy}{dy^2} ; \text{ \& partant } OH + Ht \text{ ou}$$

$$Ot = \frac{dx^3 + dx dy^2 - y dx dy}{dy^2} . \text{ D'où il suit en mul-}$$

tipliant par  $dy^2$  , & divisant par  $dx$  , que la valeur de  $dx^2 + dy^2 - yddy$  sera nulle ou infinie sous le point d'inflexion ou de rebroussement  $F$ . Or la nature de la ligne  $AFK$  ( *Fig. 54. 55. Pl. 4.* ) étant donnée , l'on aura des valeurs de  $dy$  en  $dx$  ,



& de  $ddy$  en  $dx^2$ , lesquelles étant substituées dans  $dx^2 + dy^2 - yddy$ , formeront une quantité, qui étant égale d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à trouver pour BF une valeur telle que décrivant du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebroussement F. Ce qui étoit proposé

Pour trouver encore la même chose d'une autre manière, il faut considérer que dans la partie concave, l'angle BmE (*Fig. 50. 51. Pl. 3.*) surpasse l'angle Bmn, & qu'au contraire dans la convexe il est moindre; & partant que l'angle BmE - Bmn ou Emn, (*Fig. 50. Pl. 3.*) c'est-à-dire, l'arc En qui en est la mesure, devient de positif négatif sous le point cherché F. Or prenant  $dx$  pour constante, les triangles rectangles semblables HmS, Hnk, donneront  $Hm (du) \cdot mS (dx) :: Hn (-ddy) \cdot nk = -\frac{dxddy}{du}$ . où l'on doit observer que la valeur de Hn est négative, parce que Bm ( $y$ ) croissant, Rm ( $dy$ ) diminue. Mais à cause des secteurs semblables BmS, mEk, l'on aura Bm ( $y$ ) . mS ( $dx$ ) :: mE ( $du$ ) . Ek =  $\frac{dxdu}{y}$ , & par-

tant Ek + kn ou En =  $\frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$ . D'où il suit en multipliant par  $ydu$ , & divisant par  $dx$ , que  $du^2 - yddy$  ou  $dx^2 + dy^2 - yddy$  doit devenir de positive, négative sous le point cherché F. (*Fig. 54. 55. Pl. 4.*)

Si l'on suppose que  $y$  devienne infinie, les ter-

mes  $dx^2$  &  $dy^2$  seront nuls par rapport au terme  $yddy$  ; & par conséquent la formule  $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ , ou à l'infini, se changera en cette autre  $-yddy = 0$ , ou à l'infini, c'est-à-dire, en divisant par  $-y$ ,  $ddy = 0$ , ou à l'infini, qui est la formule du premier cas. Ce qui doit aussi arriver, puisque les appliquées BM, BF, BM deviennent alors parallèles. ( Consultez la Note quarante-unième. )

## COROLLAIRE.

67. LORSQUE  $ddy = 0$ , il est clair que la différence de AL ( Fig. 52. Pl. 3. ) doit être nulle par rapport à celle de AE ; & partant que les deux tangentes infiniment proches FL, fL doivent tomber l'une sur l'autre, en ne faisant qu'une seule ligne droite fFL. Mais lorsque  $ddy =$  à l'infini, la différence de AL ( Fig. 53. Pl. 4. ) doit être infiniment grande par rapport à celle de AE, ou ( ce qui est la même chose ) la différence de AE est infiniment petite par rapport à celle de AL ; & par conséquent l'on peut mener par le même point F deux tangentes FL, Fl, qui fassent entr'elles un angle infiniment petit, LFL.

De même lorsque  $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ , il est visible que Ot ( Fig. 56. 57. Pl. 4. ) doit devenir nulle par rapport à MR ; & qu'ainsi les deux tangentes infiniment proches MT, mt, doivent tomber l'une sur l'autre, lorsque le point M devient un point d'inflexion ou de rebroussement : mais au contraire lorsque  $dx^2 + dy^2 - yddy =$  à l'infini, Ot doit être infinie par rapport à MR, ou ( ce qui

est la même chose ) M R infiniment petite par rapport à O r ; & par conséquent le point *m* doit tomber sur le point M , c'est-à-dire , qu'on peut mener par le même point M deux tangentes qui fassent entr'elles un angle infiniment petit , lorsque ce point devient un point d'inflexion ou de rebroussement.

Il est évident que la tangente au point d'inflexion ou de rebroussement F , étant prolongée , touche & coupe la courbe A F K dans ce même point. (*Consultez la Note quarante-deuxieme.*)

## E X E M P L E I.

68. **S**oit une ligne courbe A F K (*Fig. 58. Pl. 4.*) qui ait pour diamètre la ligne droite A B , & qui soit telle que la relation de la coupée A E (*x*) à l'appliquée E F (*y*) , soit exprimée par l'équation  $axx = xxy + aay$ . Il s'agit de trouver pour A E une valeur , telle que l'appliquée E F rencontre la courbe A F K au point d'inflexion F.

L'équation à la courbe est  $y = \frac{axx}{xx + aa}$  ; & partant  $dy = \frac{2a^3 x dx}{(xx + aa)^2}$  , & prenant la différence de cette quantité , en supposant *dx* constante , & l'égalant ensuite à zero , on trouve 
$$\frac{2a^3 dx^2 \times xx + aa - 8a^3 x x dx^2 \times xx + aa}{(xx + aa)^4} = 0 ;$$
 ce

qui multiplié par  $xx + aa$  , & divisé par  $2a^3 dx^2 \times xx + aa$  , donne  $xx + aa - 4xx = 0$  , d'où l'on tire  $A E (x) = a \sqrt{\frac{1}{3}}$ .

Si l'on met à la place de  $xx$  la valeur  $\frac{1}{3}aa$  dans l'équation à la courbe  $y = \frac{axx}{xx+aa}$ , on trouve EF ( $y$ )  $= \frac{1}{4}a$  ; de sorte qu'on peut déterminer le point d'inflexion F, sans supposer que la courbe A F K soit décrite.

Si l'on mene A C parallèle aux appliquées E F, & égale à la droite donnée  $a$ , & qu'on tire C G parallèle à A B, elle sera asymptote de la courbe A F K. Car si l'on suppose  $x$  infinie, on pourra prendre  $xx$  pour  $xx+aa$  ; & partant l'équation à la courbe  $y = \frac{axx}{xx+aa}$  se changera en celle-ci  $y = a$ . (Consultez la Note quarante-troisième.)

## EXEMPLE II.

69. SOIT  $y - a = \sqrt[3]{x - a}$ . Donc  $dy = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x - a}^{-\frac{2}{3}} dx$ , &  $ddy = -\frac{6}{25} \sqrt[3]{x - a}^{-\frac{7}{3}} dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[3]{x - a}^7}$ , en prenant  $dx$  pour constante. Or si l'on

suppose cette fraction égale à zero, on trouve  $-6dx^2 = 0$  ; ce qui ne faisant rien connoître, il la faut supposer infiniment grande ; & par conséquent son dénominateur  $25\sqrt[3]{x - a}^7$  infiniment petit ou zero. D'où l'inconnue A E ( $x$ )  $= a$ . (Consultez la Note quarante-quatrième.)

## EXEMPLE III.

70. Soit une demi roulette allongée AFK (Fig. 59. Pl. 4.) dont la base BK surpasse la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer sur le diamètre AB, le point E, en sorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'inflexion F.

Ayant nommé les connues ADB,  $a$ ; BK,  $b$ ; AB,  $2c$ ; & les inconnues AE,  $x$ ; ED,  $z$ ; l'arc AD,  $u$ ; EF,  $y$ ; l'on aura par la propriété de la roulette  $y = z + \frac{bu}{a}$ ; & partant  $dy = dz + \frac{bdu}{a}$ . Or par la propriété du cercle l'on aura  $z = \sqrt{2cx - xx}$ ,  $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$ , &  $du(\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$ . Donc mettant pour  $dz$  &  $du$  leurs valeurs, on trouve  $dy = \frac{acd x - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$ , dont la différence (en prenant  $dx$  pour constante) donne  $\frac{bcx - acc - bcc \times dx^2}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$ ; d'où l'on tire

$$AE(x) = c + \frac{ac}{b}, \text{ \& } CE = \frac{ac}{b}.$$

Il est clair qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion F, il faut que  $b$  surpasse  $a$ ; car s'il étoit moindre, CE surpasseroit CB. (Consultez la Note quarante-cinquieme.)

## EXEMPLE IV.

71. ON demande le point d'inflexion F (Fig. 60. Pl. 4.) de la Conchoïde A F K de Nicomede, laquelle a pour pole le point P, & pour asymptote la droite B C. Sa propriété est telle, qu'ayant mené du pole P à un de ses points quelconques F la droite P F, qui rencontre l'asymptote B C en D; la partie D F est toujours égale à une même droite donnée  $a$ .

Ayant mené P A perpendiculaire, & F E parallèle à B C, on nommera les connues A B ou F D,  $a$ ; B P,  $b$ ; & les inconnues B E,  $x$ ; E F,  $y$ ; & tirant D L parallèle à B A, les triangles semblables D L F, P E F donneront D L ( $x$ ). L F ( $\sqrt{aa - xx}$ ) :: P E ( $b + x$ ). E F ( $y$ )

$$= \frac{b + x\sqrt{aa - xx}}{x}. \text{ dont la différence est } dy =$$

$\frac{x^3 dx + aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$ . Si donc on prend la différence de cette quantité, & qu'on l'égalé à zero, on for-

$$\text{mera l'égalité } \frac{2a^4b - aax^3 - 3aabxx \times dx^2}{aax^3 - x^5 \times \sqrt{aa - xx}} = 0,$$

qui se réduit à  $x^3 + 3bxx - 2a^2b = 0$ , dont l'une des racines fournit pour B E la valeur cherchée.

Si  $a = b$ , l'équation précédente se changera en cette autre  $x^3 + 3axx - 2a^3 = 0$ , laquelle étant divisée par  $x + a$ , donne  $xx + 2ax - 2aa = 0$ ; & partant B E ( $x$ )  $= -a + \sqrt{3aa}$ .

*Autrement.*

En prenant pour appliquées les lignes  $PF$  qui partent du pôle  $P$ , & en se servant de la formule (*Art. 66.*)  $yddy = dx^2 + dy^2$ , dans laquelle  $dx$  a été supposée constante. Ayant imaginé une autre appliquée  $Pf$  qui fasse avec  $PF$  l'angle  $F P f$  infiniment petit, & décrit du centre  $P$  les petits arcs  $FG$ ,  $DH$ , on nommera les connues  $AB$ ,  $a$ ;  $BP$ ,  $b$ ; & les inconnues  $PF$ ,  $y$ ;  $PD$ ,  $z$ ; & l'on aura par la propriété de la conchoïde  $y = z + a$ , ce qui donne  $dy = dz$ . Or à cause du triangle rectangle  $DBP$ ,  $DB = \sqrt{zz - bb}$ ; & à cause des triangles semblables  $DBP$  &  $dHD$ ,  $PDH$  &  $PFG$ , l'on aura  $DB (\sqrt{zz - bb}) \cdot BP (b) :: dH (dz)$ .

$$HD = \frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}. \text{ Et } PD (z) \cdot PF (z + a) :: HD$$

$$\left( \frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}} \right) \cdot FG (dx) = \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz - bb}}. \text{ D'où l'on}$$

tire  $dz$  ou  $dy = \frac{zdx\sqrt{zz - bb}}{bz + ab}$ , dont la différen-

ce est (en supposant  $dx$  constante)  $ddy =$

$$\frac{bz^3 + 2abz\sqrt{zz - bb} - ab^3 \times dzdx}{bz + ab^2\sqrt{zz - bb}} = \frac{bz^4 + 2abz^3 - ab^3z \times dx^2}{bz + ab^3}$$

en mettant pour  $dx$  sa valeur. Donc si l'on substitue dans la formule générale (*Art. 66.*)  $yddy = dx^2 + dy^2$  à la place de  $y$  sa valeur  $z + a$ , & de  $dy$  &  $ddy$  les valeurs que l'on vient de trouver en  $dx$  &  $dx^2$ ; on formera cette équation

$$\frac{z^4 + 2az^3 - abbz \times dx^2}{bz + ab^2} = \frac{z^4 + 2abbz + aabb \times dx^2}{bz + ab^2}$$

qui se réduit à  $2z^3 - 3bbz - abb = 0$ , dont l'une des racines augmentée de  $a$  fournit la valeur de l'inconnue P F.

Si  $a = b$ , l'on aura  $2z^3 - 3aaz - a^3 = 0$ , qui étant divisée par  $z + a$ , donne  $zz - az - \frac{a^2}{2} = 0$ , dont la résolution fournit P F  $(z + a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}$ . (Consultez la Note 46.)

## EXEMPLE V.

72. **S**OIT une autre espece de Conchoïde AFK, (Fig. 60. Pl. 4.) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques F au pole P la droite P F qui coupe l'asymptote B C en D, le rectangle P D  $\times$  D F soit toujours égal au même rectangle P B  $\times$  B A. On demande le point d'inflexion F.

Si l'on nomme les inconnues B E,  $x$ ; E F,  $y$ ; & les connues A B,  $a$ ; B P,  $b$ ; on aura P D  $\times$  D F =  $ab$ ; & les paralleles B D, E F donneront P D  $\times$  D F ( $ab$ ). P B  $\times$  B E ( $bx$ ): : P F<sup>2</sup> ( $bb + 2bx + xx + yy$ ). P E<sup>2</sup> ( $bb + 2bx + xx$ ). Donc  $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$ , ou  $yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$ , &

$y = b + x \frac{\sqrt{a-x}}{x} = \sqrt{ax - xx} + b \frac{\sqrt{a-x}}{x}$ , dont

la différence donne  $dy = \frac{-axdx + 2xxdx + abd}{2x\sqrt{ax - xx}}$ ;



& prenant encore la différence, on forme l'égalité

$$\frac{3ab - ax - 4abx \times dx^2}{4ax - 4x^2 \times \sqrt{ax - x^2}} = 0, \text{ qui se réduit à } x =$$

$$\frac{3ab}{a + 4b} \text{ valeur de l'inconnue BE.}$$

Si l'on fait  $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - x^2}}$  valeur de  $dy$

égal à zero, l'on aura  $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = 0$ , dont

$$\text{les deux racines } \frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4} \text{ \& } \frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$$

fournissent, lorsque  $a$  surpasse  $8b$ , deux valeurs BH & BL, telles que l'appliquée HM (Fig. 61. Pl. 4.) est moindre que ses voisines, & l'appliquée LN plus grande, c'est-à-dire, que les tangentes en M & N seront parallèles à l'axe AB; & alors le point E tombera entre les points H & L.

Mais lorsque  $a = 8b$ , les lignes BH, BE, BL (Fig. 62. Pl. 4.) seront égales chacune à  $\frac{1}{4}a$ ; & alors la tangente au point d'inflexion F sera parallèle à l'axe AB. Et enfin lorsque  $a$  est moindre que  $8b$ , les deux racines seront imaginaires; & par conséquent il n'y aura aucune tangente qui puisse être parallèle à l'axe.

On pourroit encore résoudre cette question en prenant pour appliquées les lignes PF, Pf, (Fig. 60. Pl. 4.) qui partent du pole P, & en se servant de la formule  $yddy = dx^2 + dy^2$ , comme l'on a fait dans l'exemple précédent. (Consultez la Note 47.)

EXEMPLE

## EXEMPLE VI.

73. SOIT un cercle AED (Fig. 63. Pl. 4.) qui ait pour centre le point B, avec une ligne courbe AFK, telle qu'ayant mené à discrétion le rayon BFE, le quarré de FE soit égal au rectangle de l'arc AE par une droite donnée  $b$ . Il faut déterminer dans cette courbe le point d'inflexion F.

Ayant nommé l'arc AE,  $z$ ; le rayon BA ou BE,  $a$ ; & l'appliquée BF,  $y$ ; on aura  $bz = aa - 2ay + yy$ , & (en prenant les différences)

$$\frac{2ydy - 2ady}{b} = dz = Ee. \text{ Or à cause des secteurs}$$

$$\text{semblables } BEe, BFG, \text{ on fera } BE (a) : BF (y) :: Ee \left( \frac{2ydy - 2ady}{b} \right) : FG (dx) = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}.$$

dont la différence, en supposant  $dx$  constante, donne  $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = 0$ ;

$$\& \text{ partant } yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}.$$

Si donc on substitue à la place de  $dx^2$  &  $yddy$  leurs valeurs en  $dy^2$  dans la formule générale (Art. 66.)  $yddy = dx^2$

$$+ dy^2, \text{ on formera l'équation } \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a} =$$

$$\frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb} \text{ qui se ré-}$$

duit à  $4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabb y - 2a^2bb = 0$ , dont la résolution fournira pour BF la valeur cherchée.

Il est évident que la courbe AFK, que l'on peut appeller une *Spirale parabolique*, doit avoir

G

un point d'inflexion F. Car la circonférence AFD ne différant pas d'abord sensiblement de la tangente en A, il suit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'ensuite la courbure de la circonférence autour de son centre devenant sensible, elle doit devenir concave vers le centre. (*Consultez la Note quarante-huitième.*)

## EXEMPLE VII.

74. SOIT une ligne courbe AFK (*Fig. 64. Pl. 4*) qui ait pour axe la droite AB, dont la propriété soit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point B, la partie interceptée AB soit toujours à la tangente BF en raison donnée de  $m$  à  $n$ . Il est question de déterminer le point de rebroussement F.

Ayant nommé les inconnues & variables AE,  $x$ ; EF,  $y$ ; l'on aura  $EB = -\frac{ydx}{dy}$  ( parce que  $x$  croissant,  $y$  diminue ),  $FB = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ . Or par la propriété de la courbe, AE + EB ou AB ( $\frac{xdy - ydx}{dy}$ ) . BF ( $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ ) ::  $m$  .  $n$ .  
Donc  $m\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{nx dy}{y} - ndx$ , & sa différence donne  $\frac{m dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{-ny dx dy + nxy ddy - nx dy^2}{yy}$   
en supposant  $dx$  constante & négative; d'où l'on tire  $ddy = \frac{-ny dx dy - nx dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{myy dy - nxy \sqrt{dx^2 + dy^2}}$ . Maintenant

si l'on fait cette fraction égale à zero, on trouvera  
 $-ydx - xdy = 0$ ; ce qui ne fait rien connoître.

C'est pourquoi il faut supposer cette fraction égale  
à l'infini, c'est-à-dire, son dénominateur égal à zero;

ce qui donne  $\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{\frac{mydy}{nx} = \frac{nx dy - ny dx}{my}}}$

à cause de l'équation à la courbe, d'où l'on tire

$dx = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$ . Or quarrant chaque

membre de l'équation  $mydy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ,

on trouve encore  $dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx}$

$\frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$ , d'où l'on tire enfin  $y\sqrt{mm - nn}$

$= nx$ ; ce qui donne cette construction.

Soit décrit du diametre  $AD = m$ , un demi-  
cercle  $AID$ ; & ayant pris la corde  $DI = n$ , soit  
tirée l'indéfinie  $AI$ . Je dis qu'elle rencontrera la  
courbe  $AFK$  au point de rebroussement  $F$ .

Car ayant mené  $IH$  perpendiculaire à  $AB$ , les  
triangles rectangles semblables  $DIA$ ,  $IHA$ ,  
 $FEA$  donneront  $DI(n) \cdot IA(\sqrt{mm - nn})$   
 $:: IH \cdot HA :: FE(y) \cdot EA(x)$ . & partant  
 $y\sqrt{mm - nn} = nx$  qui étoit le lieu à construire.

Il est clair que  $BF$  est parallèle à  $DI$ , puisque  
 $AB \cdot BF :: AD(m) \cdot DI(n)$ . d'où il suit que  
l'angle  $AFB$  est droit; & partant que les lignes  
 $AB$ ,  $BF$ ,  $BE$  sont en proportion continue.

On peut trouver cette même propriété sans au-  
cun calcul, si l'on imagine (*Art. 67.*) au même  
point de rebroussement  $F$  deux tangentes  $FB$ ,  $Fb$

qui fassent entr'elles un angle  $BFb$  infiniment petit. Car décrivant du centre  $F$  le petit arc  $BL$ , on aura  $m . n :: Ab . bF :: AB . BF :: Ab - AB$  ou  $Bb . bF - BF$  ou  $bL :: BF . BE$  . à cause des triangles rectangles semblables  $BbL$ ,  $FBE$ . Donc ; &c.

Si  $m = n$ , il est évident que la droite  $AF$  deviendra perpendiculaire sur l'axe  $AB$  ; & qu'ainsi la tangente  $FB$  fera parallèle à cet axe ; ce que l'on sçait d'ailleurs devoir arriver , puisqu'en ce cas la courbe  $AF$  doit être un demi-cercle qui ait son diamètre perpendiculaire sur l'axe  $AB$ . Mais si  $m$  étoit moindre que  $n$ , il est évident qu'il n'y auroit aucun point de rebroussement ; parce qu'alors l'équation  $y\sqrt{mm - nn} = nx$  renfermeroit une contradiction. ( *Consultez la Note quarante-neuvieme.* )



## SECTION V.

*Usage du calcul des différences pour trouver  
les Développées.*

## D É F I N I T I O N.

**S**I l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque DBF ( *Fig. 65. Pl. 4.* ) concave vers le même côté, soit enveloppée ou entourée d'un fil ABDF, dont l'une des extrémités soit fixe en F, & l'autre soit tendue le long de la tangente BA, & que l'on fasse mouvoir l'extrémité A en la tenant toujours tendue & en développant continuellement la courbe BDF ; il est clair que l'extrémité A de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe AHK.

Cela posé, la courbe BDF sera nommée la *Développée* de la courbe AHK.

Les parties droites AB, HD, KF du fil ABDF seront nommées les *rayons de la développée*.

## C O R O L L A I R E I.

75. **D**E ce que la longueur du fil ABDF demeure toujours la même, il suit que la portion de courbe BD est égale à la différence des rayons DH, BA qui partent de ses extrémités ; de même la portion DF sera égale à la différence des rayons FK, DH ; & la courbe entière BDF à la différence des rayons FK, BA. D'où l'on voit que si

le rayon  $BA$  de la courbe étoit nul , c'est-à-dire , que si l'extrémité  $A$  du fil tomboit sur l'origine  $B$  de la courbe  $BDF$  , alors les rayons de la développée  $DH$  ,  $FK$  seroient égaux aux portions  $BD$  ,  $BDF$  de la courbe  $BDF$ .

## COROLLAIRE II.

76. **S**i l'on considère la courbe  $BDF$  (Fig. 66. Pl. 4) comme un polygone  $BCDEF$  d'une infinité de côtés ; il est clair que l'extrémité  $A$  du fil  $ABCDEF$  décrit le petit arc  $AG$  qui a pour centre le point  $C$  , jusqu'à ce que le rayon  $CG$  ne fasse plus qu'une ligne droite avec le petit côté  $CD$  voisin de  $CB$  ; & de même qu'elle décrit le petit arc  $GH$  qui a pour centre le point  $D$  , jusqu'à ce que le rayon  $DH$  ne fasse plus qu'une droite avec le petit côté  $DE$  ; & ainsi de suite jusqu'à ce que la courbe  $BCDEF$  soit entièrement développée. La courbe  $AHK$  peut être donc considérée comme l'assemblage d'une infinité de petits arcs de cercle  $AG$  ,  $GH$  ,  $HI$  ,  $IK$  , &c. qui ont pour centre les points  $C$  ,  $D$  ,  $E$  ,  $F$  , &c. D'où il suit.

1°. Que les rayons de la développée la touchent continuellement comme  $DH$  en  $D$  ,  $KF$  en  $F$  , &c. Et qu'ils sont tous perpendiculaires à la courbe  $AHK$  qu'ils décrivent , comme  $DH$  en  $H$  ,  $FK$  en  $K$  , &c. Car  $DH$  , par exemple , est perpendiculaire sur le petit arc  $GH$  & sur le petit arc  $HI$  , puisqu'elle passe par leurs centres  $D$  ,  $E$ . D'où l'on voit , 1°. que la développée  $BDF$  (Fig.

65. Pl. 4) termine l'espace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe  $AHK$ . 2°. Que si l'on prolonge un rayon quelconque  $HD$  qui coupe le rayon  $AB$  en  $R$ , jusqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque  $KF$  en  $S$ , l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie  $RS$  deux perpendiculaires sur la courbe  $AHK$ , excepté du point touchant  $D$  duquel on n'en peut mener qu'une seule, sçavoir  $DH$ . Car il est clair que l'intersection  $R$  des rayons  $AB$ ,  $DH$  parcourt tous les points de la partie  $RS$ , pendant que le rayon  $AB$  décrit par son extrémité  $A$  la ligne  $AHK$  sur laquelle il est continuellement perpendiculaire : & que les rayons  $AB$ ,  $HD$  ne se confondent que lorsque l'intersection  $R$  tombe sur le point touchant  $D$ .

2°. Que si l'on prolonge les petits arcs  $HG$  (Fig. 66. Pl. 4.) en  $l$ ,  $IH$  en  $m$ ,  $KI$  en  $n$ , &c. vers l'origine  $A$  du développement, chaque petit arc comme  $IH$  touchera en dehors son voisin  $HG$ , parce que les rayons  $CA$ ,  $DG$ ,  $EH$ ,  $FI$  vont toujours en augmentant, à mesure que les petits arcs qui composent la courbe  $AHK$ , s'éloignent du point  $A$ . Par la même raison si l'on prolonge les petits arcs  $AG$  en  $o$ ,  $GH$  en  $p$ ,  $HI$  en  $q$ , vers le côté opposé au point  $A$ ; chaque petit arc comme  $HI$  touchera en dessous son voisin  $IK$ . Or puisque les points  $H$  &  $I$ ,  $D$  &  $E$  peuvent être considérés comme tombant l'un sur l'autre à cause de l'infinie petitesse tant de l'arc  $HI$ , que du côté  $DE$ ; il s'ensuit que si l'on décrit d'un



point quelconque moyen D de la développée BDF comme centre, & de son rayon DH un cercle  $mHp$  il touchera en dehors la partie HA qui tombera toute entière au dedans de ce cercle, & en dedans l'autre partie HK qui tombera toute entière au dehors de ce même cercle, c'est-à-dire, qu'il touchera & coupera la courbe AHK au même point H, de même que la tangente au point d'inflexion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon HD du petit arc HG, ne différant des rayons CG, EH des arcs voisins GA, HI, que d'une quantité infiniment petite CD ou DE; il s'ensuit que pour peu qu'on diminue le rayon DH, il sera moindre que CG, & qu'ainsi son cercle touchera en dessous la partie HA; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il surpassera HE, & qu'ainsi son cercle touchera en dehors la partie HK: de sorte que le cercle  $mHp$  est le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie HA, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie HK: c'est-à-dire, qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire passer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'ensuit que la courbure du petit arc HI sera à la courbure du petit arc AG réciproquement comme le rayon BA ou CA de ce dernier est à son rayon DH ou EH: c'est-à-dire, que la courbure en H de la courbe AHK sera à sa courbure en A, comme le rayon BA au rayon DH; & de même que la

courbure en  $K$  est à la courbure en  $H$ , comme le rayon  $DH$  est au rayon  $FK$ . D'où l'on voit que la courbure de la ligne  $AHK$  diminue continuellement à mesure que la ligne  $BDF$  se développe ; de sorte qu'au point  $A$ , où commence le développement, elle est la plus grande qu'il est possible ; & au point  $K$ , où je suppose qu'il cesse, la plus petite

5°. Que les points de la développée ne sont autre chose que le concours des perpendiculaires menées par les extrémités des petits arcs qui composent la courbe  $AHK$ . Par exemple, le point  $D$  où  $E$  est le concours des perpendiculaires  $HD$ ,  $IE$  du petit arc  $HI$  ; de sorte que si la courbe  $AHK$  est donnée avec la position d'une de ses perpendiculaires  $HD$ , pour trouver le point  $D$  ou  $E$ , où elle touche la développée, il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches  $HD$ ,  $IE$  : c'est ce qu'on va enseigner dans le Problème qui suit.

## PROPOSITION I.

### PROBLÈME GÉNÉRAL.

77. **L**A nature de la ligne courbe  $AMD$  (Fig. 67. Pl. 4.) étant donnée avec une de ses perpendiculaires quelconque  $MC$  ; déterminer la longueur du rayon  $MC$  de sa développée, c'est-à-dire, le concours des perpendiculaires infiniment proches  $MC$ ,  $mC$ .

Supposons en premier lieu que la ligne courbe  $AMD$  ait pour axe la ligne droite  $AB$  sur laquelle les appliquées  $PM$  soient perpendiculaires,

On imaginera une autre appliquée  $mp$ , qui sera infiniment proche de  $MP$ , puisque le point  $m$  est supposé infiniment près de  $M$ . On menera par le point de concours  $C$  une parallèle  $CE$  à l'axe  $AB$ , laquelle rencontre les appliquées  $MP$ ,  $mp$  aux points  $E$ ,  $e$ . Enfin menant  $MR$  parallèle à  $AB$ , on formera les triangles rectangles semblables  $MRm$ ,  $MEC$ ; car les angles  $EMR$ ,  $CMm$  étant droits, & l'angle  $CMR$  leur étant commun, l'angle  $EMC$  sera égal à l'angle  $RMm$ .

Si donc l'on nomme les données  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; l'inconnue  $ME$ ,  $z$ ; l'on aura  $Ee$  ou  $Pp$  ou  $MR = dx$ ,  $Rm = dy = dz$ ,  $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; &  $MB(dx) \cdot Mm(\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: ME(z) \cdot MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ . Or le point  $C$  étant le centre

du petit arc  $Mm$ , son rayon  $CM$  qui devient  $Cm$  lorsque  $EM$  augmente de sa différence  $Rm$ , demeure le même. Sa différence sera donc nulle : ce qui donne (en supposant  $dx$  constante)  $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$ ; d'où l'on tire  $ME$

$$(z) = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-dy} \text{ en mettant pour } dz \text{ sa valeur } dy.$$

Supposons en second lieu que les appliquées  $BM$ ,  $Bm$  (*Fig. 68. Pl. 4.*) partent toutes d'un même point  $B$ . Ayant mené du point cherché  $C$  sur les appliquées, que je suppose infiniment proches, les perpendiculaires  $CE$ ,  $Ce$ , & décrit du centre  $B$  le petit arc  $MR$ ; on formera les trian-

gles rectangles semblables  $RMm$  &  $EMC$ ,  
 $BM R$ ,  $BEG$  &  $CeG$ . C'est pourquoi nom-  
 mant  $BM$ ,  $y$ ;  $ME$ ,  $z$ ;  $MR$ ,  $dx$ ; on aura  
 $Rm = dy$ ,  $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ,  $CE$  ou  $Ce$   
 $= \frac{zdy}{dx}$ , &  $MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ . On trouvera  
 ensuite, comme dans le premier cas,  $z =$   
 $\frac{dzdx^2 + d^2zdy^2}{-dyddy}$ . Or  $BM(y) \cdot Ce\left(\frac{zdy}{dx}\right) :: MR$

$(dx) \cdot Ge = \frac{zdy}{y}$ . &  $me - ME$  ou  $Rm - Ge$   
 $= dz = \frac{ydy - zdy}{y}$ . Donc en mettant cette va-  
 leur à la place de  $dz$ , l'on aura  $ME(z) =$   
 $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ .

Si l'on suppose que  $y$  soit infinie, les termes  
 $dx^2$  &  $dy^2$  seront nuls par rapport à  $yddy$ ; & par  
 conséquent cette dernière formule se changera en  
 celle du cas précédent. Ce qui doit aussi arriver;  
 puisque les appliquées deviennent alors parallèles  
 entr'elles, & que l'arc  $MR$  devient une droite  
 perpendiculaire sur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe  $AMD$   
 étant donnée, on trouvera des valeurs de  $dy^2$  &  
 $ddy$  en  $dx^2$ , ou de  $dx^2$  &  $ddy$  en  $dy^2$ , lesquelles  
 étant substituées dans les formules précédentes,  
 donneront pour  $ME$  une valeur délivrée des dif-  
 férences, & entièrement connue. Et menant  $EC$   
 perpendiculaire sur  $ME$ , elle ira couper  $MC$

perpendiculaire à la courbe, au point cherché C. Ce qui étoit proposé.

## COROLLAIRE I.

78. **A** cause des triangles rectangles semblables  $MRm$  &  $MEC$ , (Fig. 67. 68. Pl. 4.) l'on

$$\text{aura dans le premier cas } MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy},$$

$$\text{\& dans le second cas } MC = \frac{ydx^2 + ydy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dx dy^2 - ydxddy}.$$

## REMARQUE.

79. **I**L y a encore plusieurs autres manières de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne possèdent pas encore ce calcul.

*Premier cas pour les courbes dont les appliquées sont perpendiculaires à l'axe.*

Première manière. Soit prolongée  $MR$  en  $G$  où elle rencontre la perpendiculaire  $mC$ . (Fig. 67. Pl. 4.) Les angles droits  $MRm$ ,  $MmG$  donneront  $RG = \frac{dy^2}{dx}$ ; & par conséquent  $MG$

$$= \frac{dx^2 + dy^2}{dx}. \text{ Or à cause des triangles semblables}$$

$MRm$ ,  $MPQ$  (les points  $Q, q$  marquent les intersections des perpendiculaires infiniment proches  $MC$ ,  $mC$  avec l'axe  $AB$ ) il vient  $MQ$

$$= \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}, PQ = \frac{ydy}{dx}; \text{ \& partant } AQ = x$$

+  $\frac{ydy}{dx}$ , dont la différence donne ( en prenant  $dx$  pour constante )  $Qq = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx}$  ; & à cause des triangles semblables  $CMG$ ,  $CQq$ , l'on aura  $MG - Qq \left( \frac{-yddy}{dx} \right) \cdot MG \left( \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \right)$   
 $\therefore MQ \left( \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \right) \cdot MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ .

Seconde manière. Ayant décrit du centre  $C$  le petit arc  $QO$ , les petits triangles rectangles  $QOq$ ,  $MRm$  seront semblables, puisque  $Mm$ ,  $QO$  &  $MR$ ,  $Qq$  sont paralleles; & partant  $Mm$   
 $(\sqrt{dx^2 + dy^2}) \cdot MR(dx) :: Qq \left( \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx} \right)$ .

$QO = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ . Or les secteurs sem-

blables  $CMm$ ,  $CQO$  donnent  $Mm - QO$   
 $\left( \frac{-yddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right) \cdot Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: MQ$   
 $\left( \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \right) \cdot MC = \frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ .

Troisième manière. Menant les tangentes infiniment proches  $MT$ ,  $mt$ , on aura  $PT - AP$  ou  $AT = \frac{ydx}{dy} - x$ , dont la différence donne  $Tt$

$= -\frac{ydxddy}{dy^2}$  ; & décrivant du centre  $m$  le petit arc  $TF$ , on formera le triangle rectangle  $FTt$  semblable à  $RmM$ , car les angles  $FtT$ ,  $RmM$  ou  $PTM$  sont égaux, ne différant entr'eux que

de l'angle  $Tmt$  qui est infiniment petit ; ce qui donne  $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) . mR (dy) :: Tt$

$(-\frac{ydxddy}{dy^2}) . TF = \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ . Or les secteurs

$TmF$ ,  $MCm$  sont semblables, car l'angle  $Tmt + MmC$  vaut un droit, & l'angle  $MmC + MCm$  vaut aussi un droit à cause du triangle  $CMm$  considéré comme rectangle en  $M$ . Donc  $TF$

$(-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}}) . Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: Tm$  ou

$TM (\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}) . MC = \frac{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ .

Quatrième manière. On marquera (*Art. 64.*) les différences secondes en prenant  $dx$  pour constante ; & les triangles rectangles semblables  $HmS$ ,  $Hnk$  (*Fig. 69. Pl. 4.*) donneront  $Hm$  ou  $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) . mS$  ou  $MR (dx) :: Hn (-ddy)$ .

$nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ . Or l'angle  $kmn$  est égal à ce-

lui que font entr'elles les tangentes aux points  $M$ ,  $m$  ; & partant comme l'on vient de prouver, égal à l'angle  $MCm$  ; d'où il suit que les secteurs  $nmk$ ,

$MCm$  sont semblables, & qu'ainsi  $nk (-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}})$ .

$mk$  ou (*Art. 2.*)  $Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: Mm$

$(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . MC = \frac{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ . On

prend  $mH$  ou  $Mm$  pour  $mk$ , parce qu'elles ne diffèrent entr'elles que de la petite droite  $Hk$  infiniment moindre qu'elles ; de même que  $Hn$  est infiniment moindre que  $Rm$  ou  $Sn$ .

*Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.*

Première manière. Ayant mené du point fixe B (Fig. 68. Pl. 4.) les perpendiculaires BF, Bf sur les rayons infiniment proches CM, Cm; les triangles rectangles mMR, BMF, qui sont semblables (puilqu'ajoutant aux angles mMR, BMF le même angle FMR, ils composent chacun un angle droit), donneront MF ou MH =

$$\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ \& } BF = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ dont la diffé-}$$

rence (en prenant dx pour constante) est Bf = BF

$$\text{ou Hf} = \frac{dx^2 dy^2 + dy^4 + ydx^2 ddy}{dx^2 + dy^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}. \text{ Or à cause}$$

des secteurs semblables CMm, CHf, on forme cette proportion Mm — Hf. Mm :: MH. MC,

$$\text{\& partant } MC = \frac{ydx^2 + ydy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dx dy^2 - ydx ddy}.$$

Seconde manière. On marquera (Art. 64.) les différences secondes en supposant dx constante;

\& les secteurs semblables BmS, mEk (Fig. 70. Pl. 4.) donneront Bm (y). mS (dx) :: mE

$$(\sqrt{dx^2 + dy^2}). Ek = \frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \text{ Or à cause}$$

des triangles rectangles semblables HmS, Hnk, l'on aura Hm ou Mm ( $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ). mS ou MR

$$(dx) :: Hn (-ddy). nk = - \frac{dx ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}. \text{ Et}$$

$$\text{partant } En = \frac{dx^3 + dx dy^2 - ydx ddy}{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}; \text{ \& prenant}$$



une troisieme proportionnelle à  $En$ ,  $Em$  ou  $Mm$ ; les secteurs semblables  $Emn$ ,  $MCm$  donneront pour  $MC$  la même valeur qu'auparavant.

Si l'on nomme  $Mm$  ( $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ),  $du$ ; & qu'on prenne  $dy$  pour constante, au lieu de  $dx$ , on trouvera dans le premier cas  $MC = \frac{du^3}{ayddx}$ ,

& dans le second  $MC = \frac{ydu^3}{dxdu^2 + ydyddx}$ . Et en-

fin si l'on prend  $du$  pour constante, il vient dans le premier cas  $MC = \frac{dxdu}{-ddy}$  ou  $\frac{dydu}{ddx}$  (parce que la différence de  $dx^2 + dy^2 = du^2$  est  $dxddx + dyddy = 0$ , & qu'ainsi  $\frac{dx}{-ddy} = \frac{dy}{ddx}$ ); & dans

le second,  $MC = \frac{ydxdu}{dx^2 - yddy}$  ou  $\frac{ydydu}{dx dy + yddx}$ .

#### COROLLAIRE. II.

80. COMME l'on ne trouve pour  $ME$  ou  $MC$  (*Fig. 72. Pl. 4.*) qu'une seule valeur, il s'ensuit qu'une ligne courbe  $AMD$  ne peut avoir qu'une seule développée  $BCG$ .

#### COROLLAIRE III.

81. SI la valeur de  $ME$  (*Fig. 67. 68. Pl. 4.*) ( $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ ) ou ( $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ ) est positive, il faudra prendre le point  $E$  du même côté de l'axe  $AB$  ou du point  $B$ , comme l'on a supposé en faisant le calcul; d'où l'on voit que la courbe sera alors concave vers cet axe ou ce point. Mais  
si

si la valeur de  $ME$  est négative ; il faudra prendre le point  $E$  du côté opposé ; d'où l'on voit que la courbe sera alors convexe. De sorte qu'au point d'inflexion ou de rebroussement qui sépare la partie concave de la convexe , la valeur de  $ME$  doit devenir de positive négative ; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contigues doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne se peut faire qu'en deux manières. Car ou elles vont en croissant , à mesure qu'elles approchent du point d'inflexion ou de rebroussement ; & il faudra pour lors qu'elles deviennent parallèles , c'est-à-dire , que le rayon de la développée soit infini : ou elles vont en diminuant ; & il faudra nécessairement alors qu'elles tombent l'une sur l'autre , c'est-à-dire , que le rayon de la développée soit zero. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la section précédente.

## R E M A R Q U E.

82. C O M M E l'on a cru jusqu'ici que le rayon de la développée étoit toujours infiniment grand au point d'inflexion , il est à propos de faire voir qu'il y a , pour ainsi dire , une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'inflexion le rayon de la développée égal à zero ; au lieu qu'il n'y en a qu'un seul genre dans lequel ce rayon soit infini.

Soit  $BAC$  (*Fig. 71. Pl. 4.*) une des courbes qui ont dans leur point d'inflexion  $A$  le rayon de la développée infini. Si l'on développe les parties

H

BA, AC, en commençant au point A; il est clair qu'on formera une ligne courbe DAE qui aura aussi un point d'inflexion dans le même point A, mais dont le rayon de la développée en ce point sera égal à zero. Et si l'on formoit de la même sorte une troisième courbe par le développement de la seconde DAE, & une quatrième par le développement de la troisième, & ainsi de suite à l'infini; il est clair que le rayon de la développée dans le point d'inflexion A de toutes ces courbes, seroit toujours égal à zero. Donc &c.

## PROPOSITION II.

### PROBLÈME.

83. **T**ROUVER dans les courbes AMD, (Fig. 71. Pl. 4.) où l'axe AB fait avec la tangente en A un angle droit, le point B où cet axe touche la développée BCG.

Si l'on suppose que le point M devienne infiniment près du sommet A, il est clair que la perpendiculaire MQ rencontrera l'axe au point cherché B; d'où il suit que si l'on cherche en général la valeur de  $PQ \left( \frac{ydy}{dx} \right)$  en  $x$  ou en  $y$ , & qu'on fasse ensuite  $x$  ou  $y = 0$ , on déterminera le point P à tomber sur le point A, & le point Q sur le point cherché B; c'est-à-dire, que PQ deviendra alors égale à la cherchée AB. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

## EXEMPLE I.

84. SOIT la courbe AMD (Fig. 72. Pl. 4.) une Parabole qui ait pour parametre la droite donnée  $a$ . L'équation à la parabole est  $ax = yy$ ; dont la différence donne  $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$ ; & prenant la différence de cette dernière équation; en supposant  $dx$  constante, on trouve  $ddy = -\frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$ . Substituant enfin ces valeurs à la place

de  $dy$  & de  $ddy$  dans la formule  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ ; on aura (Art. 77.)  $ME = \frac{a + 4x\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ . Ce qui donne cette construction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallèle à MC; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E. Car les angles droits MPT, MTE donnent MP ( $\sqrt{ax}$ ). PT ( $2x$ ) :: PT ( $2x$ ). PE =  $\frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ ; & par conséquent MP + PE =  $\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ .

De plus à cause des triangles rectangles MPQ, MEC, l'on aura PM ( $\sqrt{ax}$ ). PQ ( $\frac{1}{2}a$ ) :: ME ( $\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ ). EC ou PK =  $\frac{1}{2}a + 2x$ . & partant QK =  $2x$ . Ce qui donne cette nouvelle construction.

H 2

Soit prise QK double de AP, ou (ce qui revient au même) soit prise PK égale à TQ, & soit menée KC parallèle à PM. Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui sera à la développée BCG.

Autre manière.  $yy = ax$ , &  $2ydy = adx$  dont la différence (en supposant  $dx$  constante) donne  $2dy^2 + 2yddy = 0$ ; d'où l'on tire  $ddy = \frac{dy^2}{y}$ . Et

mettant cette valeur dans la formule  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ ,

on trouve (Art. 77.)  $ME = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dy^2}$ ; & par-

tant EC ou PK  $= \frac{ydy^2 + ydx^2}{dydx} = \frac{y^2y}{dx} + \frac{ydx}{dy} = PQ + PT$  ou TQ. Ce qui donne les mêmes constructions qu'auparavant. Car  $MP \cdot PT :: dy \cdot dx :: PT \left(\frac{ydx}{dy}\right)$ .

$$PE = \frac{ydx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}.$$

Pour trouver à présent le point B où l'axe AB touche la développée BCG. On a  $PQ \left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{1}{2}a$ .

Or comme cette quantité est constante, elle demeurera toujours la même en quelque endroit que se trouve le point M. Et ainsi, lorsqu'il tombe sur le sommet A, l'ou aura encore PQ qui devient en ce cas  $AB = \frac{1}{2}a$ .

Pour trouver la nature de la développée BCG à la manière de Descartes. On nommera la coupée BK,  $u$ ; l'appliquée KC ou PE,  $t$ ; d'où l'on

aura  $CK(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$  &  $AP + PK - AB(u) = 3x$ ; mettant donc pour  $x$  la valeur  $\frac{1}{3}u$  dans l'équation  $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ , l'on en formera une nouvelle  $27att = 16u^3$  qui exprimera la relation de BK à KC. D'où l'on voit que la développée BCG de la parabole ordinaire est une seconde parabole cubique dont le paramètre est égal à  $\frac{27}{16}$  du paramètre de la parabole donnée.

Il est visible que la développée CBC (Fig. 73. Pl. 4.) de la parabole commune entière M A M a deux parties CB, BC qui ont leurs convexités opposées l'une à l'autre, de sorte qu'elles forment en B un point de rebroussement.

#### AVERTISSEMENT.

*On entend par courbes géométriques AMD, BCG (Fig. 72. Pl. 4.) celles dont la relation des coupées AP, BK aux appliquées PM, KC, se peut exprimer par une équation où il ne se rencontre point de différences; & on prend pour géométrie tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on suppose ici que les coupées & les appliquées soient des lignes droites.*

#### COROLLAIRE.

85. **L**ORSQUE la courbe donnée AMD est géométrique, il est clair que l'on pourra toujours trouver (comme dans cet exemple) une équation qui exprime la nature de sa développée BCG; & qu'ainsi cette développée sera aussi géo-

H 3

métrique. Mais je dis de plus qu'elle sera rectifiable, c'est-à-dire, qu'on pourra trouver géométriquement des lignes droites égales à une de ses portions quelconque  $BC$ ; car il est évident (*Art.* 75.) que l'on déterminera avec le secours de la ligne  $AMD$ , qui est géométrique, sur la tangente  $CM$  de la portion  $BC$ , un point  $M$  tel que la droite  $CM$  ne différera de la portion  $BC$  que d'une droite donnée  $AB$ .

## EXEMPLE II.

86. **SOIT** la courbe donnée  $MDM$  (*Fig.* 74. *Pl.* 4.) une hyperbole entre ses asymptotes, qui ait pour équation  $aa = xy$ .

On aura  $\frac{aa}{y} = x$ ,  $\frac{-aady}{yy} = dx$ , & supposant

$dx$  constante, (*Art.* 1.)  $\frac{-aayyddy + 2aady^2}{y^4} = 0$ ;

d'où l'on tire  $ddy = \frac{2dy^2}{y}$ ; & mettant cette valeur

dans  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ , il vient (*Art.* 77.)  $ME =$

$\frac{ydx^2 + y^2y^2}{-2dy^2}$ ; de sorte que  $EC$  ou  $PK = -\frac{ydy}{2dx}$

$-\frac{ydx}{2dy}$ . Ce qui donne ces constructions.

Soit menée par le point  $T$  où la tangente  $MT$  rencontre l'asymptote  $AB$ , la ligne  $TS$  parallèle à  $MC$  & qui rencontre  $MP$  prolongée en  $S$ ; soit prise  $ME$  égale à la moitié de  $MS$  de l'autre côté de l'asymptote (que l'on regarde ici comme l'axe)

# DES INFINIMENT PETITS. fig

parce que sa valeur est négative; ou bien soit prise PK égale à la moitié de TQ du même côté du point T: je dis que si l'on mene EC parallèle, ou KC perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite MC au point cherché C. Car il est clair que  $MS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$ , & que  $TQ = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy}$ .

Si l'on fait quelque attention sur la figure de l'hyperbole MDM, on verra que sa développée CLC doit avoir un point de rebroussement L, de même que la développée de la parabole. Pour le déterminer je remarque que le rayon DL de la développée est plus petit que tout autre rayon MC; d'où il suit que la différence de son expres-

sion ( Art. 78. )  $\frac{\overline{dx^2 + dy^2} \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$  ou  $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$

sera : ( Sect. 3. ) nulle ou infinie. Ce qui donne, en prenant toujours dx pour constante,

$$\frac{-3dx dy ddy^2 \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dx dddy \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2} = 0 \text{ ou } \infty$$

; d'où en divisant par  $\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}$ , & multipliant ensuite par  $dx ddy^2$ , on tire cette équation  $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2 = 0$  ou  $\infty$ , qui servira à trouver pour x une valeur AH, telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la développée, le point L fera le point de rebroussement cherché.

On a dans cet exemple  $y = \frac{aa}{x}$ ,  $dy = \frac{-aadx}{xx}$ ,



$ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$ ,  $ddd = \frac{-6aadx^3}{x^4}$ . C'est pour-  
quoi mettant ces valeurs dans l'équation précé-  
dente, on trouve  $AH(x) = a$ . D'où il suit que  
le point D est le sommet de l'hyperbole, & que  
les lignes AD, DL ne font qu'une même droite  
AL qui en est l'axe.

## EXEMPLE III.

87. SOIT l'équation générale  $y^m = x$  (Fig. 72,  
74. Pl. 4.) qui exprime la nature de toutes les  
paraboles à l'infini, lorsque l'exposant  $m$  marque  
un nombre positif entier ou rompu, & de toutes  
les hyperboles, lorsqu'il marque un nombre né-  
gatif.

On aura  $my^{m-1}dy = dx$  dont la différence don-  
ne, en prenant  $dx$  pour constante,  $\overline{mm} - my^{m-2}dy^2$   
 $+ my^{m-1}ddy = 0$ ; & en divisant par  $my^{m-1}$ , il  
vient  $-ddy = \frac{m-1}{y}dy^2$ ; d'où mettant cette va-  
leur dans  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ , on tirera (Art. 77.)  $ME$   
 $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{m-1dy^2}$ ; & partant  $EC$  ou  $PK = \frac{ydy}{m-1dx}$   
 $+ \frac{ydx}{m-1dy}$ . Ce qui donne ces constructions gé-  
nérales.

Soit menée par le point T où la tangente MT  
rencontre l'axe AP, la ligne TS parallèle à MC  
& qui rencontre MP prolongée au point S; soit

prise  $ME = \frac{1}{m-1} MS$ , ou bien soit prise  $PK$

$= \frac{1}{m-1} TQ$  : il est clair que si l'on mène par le point E une parallèle, ou par le point K une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront M.C au point cherché C.

Si  $m$  est négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de ME (*Fig. 74. Pl. 4.*) sera négative; & par conséquent elles seront convexes vers leur axe qui sera alors une asymptote. Mais dans les paraboles où  $m$  est positif, il peut arriver deux cas. Car ou  $m$  (*Fig. 75. Pl. 4.*) sera moindre que 1, & alors elles seront convexes du côté de leur axe, qui sera une tangente au sommet : ou  $m$  (*Fig. 72. Pl. 4.*) surpasse 1, & alors elles seront concaves vers leur axe qui sera perpendiculaire au sommet.

Pour trouver dans ce dernier cas le point B où l'axe AB touche la développée. On a PQ

$$\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{y^{2-m}}{m}; \text{ ce qui donne trois différens cas.}$$

Car ou  $m = 2$ , ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'exposant de  $y$  étant nul, cette inconnue s'évanouit; & par conséquent  $AB = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire, à la moitié du parametre. Ou  $m$  est moindre que 2, & alors l'exposant de  $y$  étant positif, elle se trouvera dans le numérateur, ce qui rend (en l'égalant (*Art. 83.*) à zero) la fraction nulle : c'est-à-dire, que le point B tombe en ce cas sur le point A, comme dans la seconde

parabole cubique  $axx = y^3$ . Ou enfin  $m$  (Fig. 76. Pl. 4.) surpasse 2, & alors l'exposant de  $y$  étant négatif, elle sera dans le dénominateur, ce qui rend (lorsqu'elle devient zero) la fraction infinie : c'est-à-dire, que le point B est infiniment éloigné du point A, ou (ce qui est la même chose) que l'axe AB est asymptote de la développée, comme dans la première parabole cubique  $axx = y^3$ . On peut remarquer dans ce dernier cas que la développée CLO (Fig. 77. Pl. 4.) de la demi-parabole A D M a un point de rebroussement L ; de sorte que par le développement de la partie LO continuée à l'infini, le point D ne décrit que la portion déterminée D A ; au lieu que par le développement de l'autre partie LC continuée aussi à l'infini, il décrit la portion infinie D M.

On déterminera le point L de même que dans l'hyperbole. Soit par exemple  $axx = y^3$ , ou  $y = x^{\frac{2}{3}}$ , on aura  $dy = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx$ ,  $ddy = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} dx^2$ ,  $ddy = \frac{10}{27} x^{-\frac{7}{3}} dx^3$  ; & ces valeurs étant substituées dans l'équation  $dx^2 ddy + dy^2 ddy - 3 dy ddy^2 = 0$ , on trouvera (Art. 86.)  $AH(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{91125}}$ . Il en est ainsi des autres.

## REMARQUE.

88. EN supposant que  $m$  surpasse 1, afin que les paraboles soient toujours concaves du côté de leur axe, il peut arriver différens cas. Car si le numérateur de la fraction marquée par  $m$  est pair, & le

dénominateur impair ; toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire. (*Fig. 73. Pl. 4.*) Mais si le numérateur & le dénominateur sont chacun impair ; elles ont une position renversée de part & d'autre de leur axe , en sorte que leur sommet A (*Fig. 77. Pl. 4.*) est un point d'inflexion , comme la première parabole

cubique  $x = y^{\frac{2}{3}}$  ou  $aax = y^3$ . Enfin si le numérateur étant impair, le dénominateur est pair ; elles ont une position renversée du même côté de leur axe , en sorte que leur sommet A (*Fig. 76. Pl. 4.*) est un point de rebroussement , comme la seconde

parabole cubique  $x = y^{\frac{2}{3}}$  ou  $axx = y^3$ . Tout cela suit de ce qu'une puissance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela posé , il est évident ,

1°. Que dans le point d'inflexion A , (*Fig. 77. Pl. 4.*) le rayon de la développée peut être infiniment grand , comme dans  $aax = y^3$  , ou infiniment petit , comme dans  $aax^3 = y^4$ .

2°. Que dans le point de rebroussement A , (*Fig. 76. Pl. 4.*) le rayon de la développée peut être ou infini comme dans  $a^3xx = y^5$  , ou zero comme dans  $axx = y^3$ .

3°. Qu'il ne s'ensuit pas (*Fig. 73. Pl. 4.*) de ce que le rayon de la développée est infini ou zero , que les courbes aient alors un point d'inflexion ou de rebroussement. Car dans  $a^3x = y^4$  il est infini , dans  $ax^3 = y^4$  il est nul ; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de

leur axe dans une position semblable à celle de la parabole ordinaire.

## EXEMPLE IV.

89. Soit la courbe AMD (*Fig. 78. 79. Pl. 4 & 5.*) une hyperbole ou une ellipse qui ait pour axe AH ( $a$ ), & pour parametre AF ( $b$ ).

On aura par la propriété de ces lignes  $y =$

$$\sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}}, \quad dy = \frac{abdx \mp 2bxx}{2\sqrt{aax \mp abxx}}, \quad \& \quad ddy =$$

$$\frac{-a^3 b b d x^2}{4aax \mp 4abxx \sqrt{aax \mp abxx}}. \quad \text{Si donc l'on met ces valeurs}$$

dans  $\frac{dx^2 + dy^2}{dx ddy} \sqrt{dx^2 + dy^2}$  expression générale de

(*Art. 78.*) MC, on trouvera dans ces deux courbes MC =  $\frac{aabb \mp 4abbbx + 4bbxx + 4aax \mp 4abxx}{2a^3 bb} \times$

$$\frac{\sqrt{aabb \mp 4abbbx + 4bbxx + 4aax \mp 4abxx}}{2a^3 bb} = \frac{4MQ^3}{bb}, \text{ puis}$$

que de part & d'autre MQ  $\left( \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \right)$

$$= \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbbx + 4bbxx + 4aax \mp 4abxx}}{2a}. \quad \text{Ce qui donne}$$

cette construction qui sert aussi pour la parabole.

Soit prise MC quadruple de la quatrième continuellement proportionnelle au parametre AF & à la perpendiculaire MQ terminée par l'axe; le point C sera à la développée.

Si l'on fait  $x = 0$ , on aura (*Art. 83.*) AB =  $\frac{1}{2}b$ . Et si l'on fait dans l'ellipse  $x = \frac{1}{2}a$ , on

trouvera DG (Fig. 79. Pl. 5.)  $= \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$ , c'est-à-dire, égal à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipse la développée BCG se termine en un point G du petit axe DO, où elle forme un point de rebroussement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini.

Si  $a = b$  dans l'ellipse, il vient  $MC = \frac{1}{2}a$ ; d'où il suit que tous les rayons de la développée sont égaux entr'eux, & qu'elle ne sera par conséquent qu'un point: c'est-à-dire, que l'ellipse devient en ce cas un cercle qui a pour développée son centre. Ce que l'on sçait d'ailleurs être véritable.

## EXEMPLE V.

90. SOIT la courbe AMD (Fig. 80. Pl. 5.) une logarithmique ordinaire, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ces points quelconque M la perpendiculaire MP sur l'asymptote KP, & la tangente MT; la soutangente PT soit toujours égale à la même droite donnée  $a$ .

On a donc  $PT \left( \frac{ydx}{dy} \right) = a$ , d'où l'on tire  $dy = \frac{ydx}{a}$ , dont la différence donne, en prenant  $dx$  pour constante,  $ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$ ; & mettant ces valeurs dans  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ , on trouve (Art. 77.)  $ME = \frac{aa - yy}{y}$ ; & partant EC ou PK =

$\frac{-aa - yy}{a}$ . Ce qui donne cette construction.

Soit prise  $PK$  égale à  $TQ$  du même côté de  $T$ , parce que sa valeur est négative ; & soit menée  $KC$  parallèle à  $PM$  : je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire  $MC$  au point cherché

$C$ . Car  $TQ = \frac{aa + yy}{a}$ .

Si l'on veut que le point  $M$  soit celui de la plus grande courbure , on se servira de la formule  $dx^2 dddy + dy^2 dddx - 3dy ddy^2 = 0$ , que l'on a trouvée (*Art.* 86.) dans l'exemple second ; &

mettant pour  $dy$ ,  $ddy$ ,  $ddd$ , leurs valeurs  $\frac{y dx}{a}$ ,  $\frac{y dx^2}{aa}$ ,  $\frac{y dx^3}{a^3}$ , on trouvera  $PM (y) a \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

Il est clair, en prenant  $dx$  pour constante, que les appliquées  $y$  sont entr'elles comme leurs différences  $dy$  ou  $\frac{y dx}{a}$  ; d'où il suit qu'elles sont aussi une progression géométrique. Car si l'on conçoit que l'asymptote ou l'axe  $PK$  soit divisé en un nombre infini de petites parties égales  $Pp$  ou  $MR$ ,  $pf$  ou  $mS$ ,  $fg$  ou  $nH$ , &c. comprises entre les appliquées  $PM$ ,  $pm$ ,  $fn$ ,  $go$ , &c. l'on aura  $PM . pm :: Rm . Sn :: PM + Rm$  ou  $pm + pm + Sn$  ou  $fn$ . On prouve de même que  $pm . fn :: fn . go$ , & ainsi de suite. Les appliquées  $PM$ ,  $pm$ ,  $fn$ ,  $go$ , &c. feront donc entr'elles une progression géométrique.

## E X E M P L E V I.

91. **S**oit la courbe  $AMD$  (*Fig. 81. Pl. 5.*) une logarithmique spirale, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconque  $M$  au point fixe  $A$ , qui en est le centre, la droite  $MA$  & la tangente  $MT$ ; l'angle  $AMT$  soit par tout le même.

L'angle  $AMT$  ou  $AmM$  étant constant, la raison de  $mR$  ( $dy$ ) à  $RM$  ( $dx$ ) sera aussi constante. Il faut donc que la différence de  $\frac{dy}{dx}$  soit nulle; ce qui donne (en supposant  $dx$  constante)  $ddy = 0$ . C'est pourquoi effaçant le terme  $yddy$  dans  $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$  expression (*Art. 77.*) générale de  $ME$ , lorsque les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve  $ME = y$ , c'est-à-dire,  $ME = AM$ . Ce qui donne cette construction.

Soit menées  $AC$  perpendiculaire sur  $AM$ , & qui rencontre en  $C$  la droite  $MC$  perpendiculaire à la courbe; le point  $C$  sera à la développée  $ACB$ .

Les angles  $AMT$ ,  $ACM$  sont égaux, puisqu'étant joints l'un & l'autre au même angle  $AMC$  ils font un angle droit. La développée  $ACG$  sera donc la même logarithmique spirale que la donnée  $AMD$ , & elle n'en différera que par la position.

Si l'on suppose que le point  $C$  de la développée  $ACG$  étant donné, il faille déterminer la longueur  $CM$  de son rayon en ce point, qui (*Art. 75.*)



est égal à la portion  $AC$  qui fait une infinité de retours avant que de parvenir en  $A$  ; il est clair qu'il n'y a qu'à mener  $AM$  perpendiculaire sur  $AC$ . De sorte que si l'on mène  $AT$  perpendiculaire sur  $AM$ , la tangente  $MT$  sera aussi égale à la portion  $AM$  de la logarithmique spirale donnée  $AMD$ .

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées  $AM$ ,  $Am$ ,  $An$ ,  $Ao$ , &c. qui fassent entr'elles des angles infiniment petits & égaux ; il est clair que les triangles  $MAm$ ,  $mAn$ ,  $nAo$ , &c. seront semblables, puisque les angles en  $A$  sont égaux, & que par la propriété de la logarithmique, les angles en  $m$ ,  $n$ ,  $o$ , &c. le sont aussi. Et partant  $AM. Am :: Am. An$ . Et  $Am. An :: An. Ao$ . & ainsi de suite. D'où l'on voit que les appliquées  $AM$ ,  $Am$ ,  $An$ ,  $Ao$ , &c. font une progression géométrique, lorsqu'elles font entr'elles des angles égaux.

#### EXEMPLE VII.

92. **S**oit la courbe  $AMD$  ( *Fig. 82. Pl. 5.* ) une des spirales à l'infini, formée dans le secteur  $BAD$  avec une propriété telle qu'ayant mené un rayon quelconque  $AMP$ , & ayant nommé l'arc entier  $BPD$ ,  $b$  ; la partie  $BP$ ,  $z$  ; le rayon  $AB$  ou  $AP$ ,  $a$  ; & la partie  $AM$ ,  $y$  ; on ait cette proportion  $b. z :: a^m. y^m$ .

L'équation à la spirale  $AMD$  est  $y^m = \frac{a^m z}{b}$  ,

dont la différence donne  $my^{m-1} dy = \frac{a^m dz}{b}$ . Or à  
cause

cause des secteurs semblables  $AMR$ ,  $APp$ , l'on aura  $AM(y) \cdot AP(a) :: MR(dx) \cdot Pp(dz) = \frac{adx}{y}$ . Mettant donc cette valeur à la place de  $dz$  dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura  $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$  dont la différence (en prenant  $dx$  pour constante) est  $mmy^{m-1} dy^2 + my^m ddy = 0$ ; d'où en divisant par  $my^{m-1}$ , l'on tire  $-yddy = mdy^2$ ; & partant  $ME$  (*Art. 77.*)  $(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + m+1 dy^2}$ ; ce qui donne cette construction.

Soit menée par le centre  $A$  la droite  $TAQ$  perpendiculaire sur  $AM$ , & qui rencontre en  $T$  la tangente  $MT$ , & en  $Q$  la perpendiculaire  $MQ$ ; soit fait  $TA + \frac{1}{m+1}AQ \cdot TQ :: MA \cdot ME$ . Je dis que menant  $EC$  parallèle à  $TQ$ , elle ira rencontrer  $MQ$  en un point  $C$  qui sera à la développée.

Car à cause des parallèles  $MRG$ ,  $TAQ$ , l'on aura  $MR(dx) + \frac{1}{m+1}RG(\frac{dy^2}{dx}) \cdot MG(dx + \frac{dy^2}{dx}) :: TA + \frac{1}{m+1}AQ \cdot TQ :: AM(y) \cdot ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + m+1 dy^2}$ .

## EXEMPLE. VIII.

93. SOIT  $AMD$  (*Fig. 83. Pl. 5.*) une demi-roulette simple, dont la base  $BD$  est égale à la demi-circonférence  $BEA$  du cercle générateur.

I

Ayant nommé  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; l'arc  $AE, u$ ; & le diamètre  $AB, 2a$ ; l'on aura par la propriété du cercle  $PE = \sqrt{2ax - xx}$ ; & par celle de la roulette  $y = u + \sqrt{2ax - xx}$ , dont la différence donne  $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$  ou  $dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$ , en mettant pour  $du$  sa valeur

$$\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}; \text{ en supposant } dx \text{ constante, } ddy =$$

$$\frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}; \text{ \& en mettant ces valeurs dans}$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}, \text{ il vient (Art. 78.) } MC$$

$$= 2\sqrt{4aa - 2ax}, \text{ c'est-à-dire, } 2BE \text{ ou } 2MG.$$

Si l'on fait  $x=0$ , l'on aura  $AN=4a$  pour rayon de la développée dans le sommet  $A$ . Mais si l'on fait  $x=2a$ , on trouvera que le rayon de la développée au point  $D$  devient nul ou zero; d'où l'on voit que la développée a son origine en  $D$ , & qu'elle se termine en  $N$ , en sorte que  $BN=BA$ .

Pour sçavoir la nature de cette développée, il n'y a qu'à achever le rectangle  $BS$ , décrire le demi-cercle  $DIS$  qui a pour diamètre  $DS$ , & mener  $DI$  parallèle à  $MC$  ou à  $BE$ . Cela fait, il est clair que l'angle  $BDI$  est égal à l'angle  $EBD$ ; & par conséquent que les arcs  $DI, BE$  sont égaux entr'eux; d'où il suit que leurs cordes  $DI, BE$  ou  $GC$  sont aussi égales. Si donc l'on tire  $IC$ , elle sera égale & parallèle à  $DG$ ,

qui par la génération de la roulette est égale à l'arc BE ou DI ; & partant la développée DCN est une demi-roulette qui a pour base la droite NS égale à la demi-circonférence DIS de son cercle générateur : c'est-à-dire , que c'est la demi-roulette même AMDB , posée dans une situation renversée.

## COROLLAIRE.

94. IL est clair (*Art. 75.*) que la portion de roulette DC est double de la tangente CG ; ou de la corde correspondante DI. Et la demi-roulette DCN double du diamètre BN ou DS de son cercle générateur.

## AUTRE SOLUTION.

95. ON peut encore trouver la longueur du rayon MC sans aucun calcul , en cette sorte : Ayant imaginé une autre perpendiculaire  $mC$  infiniment proche de la première , une autre parallèle  $me$  , une autre corde  $Be$  , & décrit des centres , C , B les petits arcs GH , EF , on formera les triangles rectangles GHg ; EF $e$  qui seront égaux & semblables ; car  $Gg = Ee$  , puisque BG ou ME est égale à l'arc AE , & de même Bg ou  $me$  est égal à l'arc Ae ; de plus Hg ou  $mg - MG = Fe$  ou  $Be - BE$  ; GH sera donc égal à EF. Or les perpendiculaires MC ,  $mC$  , étant parallèles aux cordes EB ,  $eB$  , l'angle M $Cm$  sera égal à l'angle EBe. Donc puisque les arcs GH , EF , qui mesurent ces angles , sont

égaux , il s'ensuit que leurs rayons  $CG$  ,  $BE$  seront aussi égaux ; & partant que  $MC$  doit être prise double de  $MG$  ou de  $BE$ .

## LEMMES.

96. *S'IL y a un nombre quelconque de quantités  $a, b, c, d, e$ , &c. soit que ce nombre soit fini ou infini , soit que ces quantités soient des lignes , ou des surfaces , ou des solides ; la somme  $a - b + b - c + c - d + d - e$ , &c. de toutes leurs différences est égale à la plus grande  $a$ , moins la plus petite  $e$ , ou simplement à la plus grande , lorsque la plus petite est zero. Ce qui est visible.*

## COROLLAIRE I.

97. *LES secteurs  $CMm$ ,  $CGH$ , étant semblables , il est clair que  $Mm$  est double de  $GH$  ou de son égale  $EF$  ; & comme cela arrive toujours en quelque endroit que l'on suppose le point  $M$ , il s'ensuit que la somme de tous les petits arcs  $Mm$ , c'est à dire , la portion  $Am$  de la demi-roulette  $AMD$ , est double de la somme de tous les petits arcs  $EF$ . Or le petit arc  $EF$  fait partie de la corde  $AE$  perpendiculaire sur  $BE$ , & est la différence des cordes  $AE$ ,  $Ae$ , parce que la petite droite  $eF$  perpendiculaire sur  $Ae$  peut être considérée comme un petit arc décrit du centre  $A$  ; & partant la somme de tous les petits arcs  $EF$  dans l'arc  $AZE$  sera la somme des différences de toutes les cordes  $AE$ ,  $Ae$ , &c. dans cet arc , c'est-à-dire , par le Lemme qu'elle sera égale à la corde  $AE$ . Il est donc évident*

que la portion  $AM$  de la demi-roulette  $AMD$  est double de la corde correspondante  $AE$ .

## COROLLAIRE II.

98. L'ESPACE  $M G g m$  (*Art. 2.*) ou le trapèze  $M G H m = \frac{1}{2} M m + \frac{1}{2} G H \times M G = \frac{1}{2} E F \times B E$ , c'est-à-dire, qu'il est triple du triangle  $EBE$  ou  $EBe$ ; d'où il suit que l'espace  $MGBA$ , somme de tous ces trapèzes, est triple de l'espace circulaire  $BEZA$ , somme de tous ces triangles.

## COROLLAIRE III.

99. NOMMANT  $BP$ ,  $\tau$ ; l'arc  $AZE$  ou  $EM$  ou  $BG$ ,  $u$ ; & le rayon  $KA$ ,  $a$ ; l'on aura le parallélogramme  $MGBE = u\tau$ . Or l'espace de la roulette  $MGBA = 3BEZA = 3EKB + \frac{1}{2} au$ ; & partant l'espace  $AMEB$  renfermé par la portion de roulette  $AM$ , la parallèle  $ME$ , la corde  $BE$  & le diamètre  $AB$ , est  $= 3EKB + \frac{1}{2} au - u\tau$ . D'où il suit que si l'on prend  $BP$  ( $\tau$ )  $= \frac{1}{2} a$ , l'espace  $AMEB$  sera triple du triangle correspondant  $EKB$ ; & aura par conséquent sa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que *M. Hugen*s a remarqué le premier. Voici encore une autre sorte d'espace qui a la même propriété.

Si l'on retranche de l'espace  $AMEB$  le segment  $BEZA$ , il restera l'espace  $AZEM = 2EKB + au - u\tau$ ; d'où l'on voit que si le point  $P$  tombe au centre  $K$ , l'espace  $AZEM$  sera égal au carré du rayon. Il est évident qu'entre tous les espaces  $AMEB$  &  $AZEM$ , il n'y a que

les deux que l'on vient de déterminer qui ayent leur quadrature absolue indépendante de celle du cercle.

## EXEMPLE IX.

100. SOIT la demi-roulette AMD (*Fig. 84. Pl. 5.*) décrite par la révolution du demi-cercle AEB autour d'un autre cercle immobile BGD; & qu'il faille déterminer sur la perpendiculaire MG donnée de position, le point où elle touche la développée.

Pour se servir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe AMD, des lignes droites perpendiculaires sur l'axe OA, & chercher ensuite une équation qui exprimât la relation des coupees aux appliquées, ou de leurs différences. Mais comme le calcul en seroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces sortes de rencontres en tenter la solution en se servant de la génération même.

Lorsque le demi-cercle AEB est parvenu dans la position MGB dans laquelle il touche en G la base BD; & que le point décrivant A tombe sur le point M de la demi-roulette AMD: il est clair,

1°. Que l'arc GM est égal à l'arc GD, comme aussi l'arc GB du cercle mobile à l'arc GB du cercle immobile.

2°. Que MG est (*Art. 43.*) perpendiculaire sur la courbe; car considérant la demi-circonférence MGB ou AEB, & la base BGD comme l'assemblage d'une infinité de petites droites

égales chacune à sa correspondante, il est manifeste que la demi-roulette  $AMD$  sera l'assemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centre successivement tous les points touchans  $G$ , & qui seront décrits chacun par le même point  $M$  ou  $A$ .

3°. Que si l'on décrit du centre  $O$  du cercle immobile l'arc concentrique  $ME$ ; les arcs  $MG$ ,  $EB$  du cercle mobile seront égaux entr'eux, aussi-bien que leurs cordes  $MG$ ,  $EB$ , & les angles  $OGM$ ,  $OBE$ . Car les droites  $OK$ ,  $OK$ , qui joignent les centres des deux cercles sont égales, puisqu'elles passent par les points touchans  $B$ ,  $G$ ; c'est pourquoi menant les rayons  $OM$ ,  $OE$ , &  $KE$ , on formera les triangles  $OKM$ ,  $OKE$  égaux & semblables. L'angle  $OKM$  étant donc égal à l'angle  $OKE$ ; les arcs  $MG$ ,  $BE$  des demi-cercles égaux  $MGB$ ,  $BEA$ , qui mesurent ces angles, seront égaux, comme aussi leurs cordes  $MG$ ,  $EB$ ; d'où il suit que les angles  $OGM$ ,  $OBE$  le seront aussi.

Cela posé, soit entendue une autre perpendiculaire  $mC$  (*Fig. 85. Pl. 5.*) infiniment proche de la première, un autre arc concentrique  $me$ , & une autre corde  $Be$ ; soient décrits des centres  $C$ ,  $B$ , les petits arcs  $GH$ ,  $EF$ . Les triangles rectangles  $GHg$ ,  $EF e$  seront égaux & semblables; car  $Gg$  ou  $Dg - DG = Ee$  ou à l'arc  $Be -$  l'arc  $BE$ , de plus  $Hg$  ou  $mg - MG = Fe$  ou à  $Be - BE$ . Le petit arc  $GH$  sera donc égal au petit arc  $EF$ ; d'où il suit que l'angle  $GCH$



est à l'angle  $EBF$ , comme  $BE$  est à  $CG$ . Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui se fait en cette sorte.

Ayant mené les rayons  $OG$ ,  $Og$ ,  $KE$ ,  $Ke$ , & nommé  $OG$  ou  $OB$ ,  $b$ ;  $KE$  ou  $KB$  ou  $KA$ ,  $a$ ; il est clair que l'angle  $EBe = OBe - OBE = Ogm - OGM =$  (en menant  $GL$ ,  $GV$  parallèles à  $Cm$ ,  $Og$ )  $LGM - OGV = GCH - GOg$ . On aura donc l'angle  $GCH = GOg + EBF$ . Or les arcs  $Gg$ ,  $Ee$  étant égaux, l'on aura aussi  $GOg = EKe$  ou  $2EBF$ ;  $: KE (a)$ .  $OG (b)$ ; & partant l'angle  $GOg = \frac{2a}{b} EBF$ ,

&  $GCH = \frac{2a+b}{b} EBF$ . Donc  $GCH : EBF$  ou

$BE : CG :: \frac{2a+b}{b} : 1$ , & partant l'inconnue

$CG = \frac{b}{2a+b} BE$  ou  $MG$ . Ce qui donne cette construction.

Soit fait  $OA$  (*Fig. 86. Pl. 3.*)  $(2a + b)$ ,  $OB (b)$ ;  $: MG : GC$ ; le point  $C$  sera à la développée.

Il est clair 1°. Que cette développée commence au point  $D$ , & qu'elle y touche la base  $BGD$ ; puisque l'arc  $GM$  devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle se termine au point  $N$ , en sorte que  $OA : OB :: AB : BN :: OA - AB$  ou  $OB - BN$  ou  $ON$ ; c'est-à-dire, que  $OA$ ,  $OB$ ,  $ON$  sont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on décrit à présent le cercle

NSQ du centre O, je dis que la développée DCN est formée par la révolution du cercle mobile GCS, qui a pour diamètre GS ou BN, autour de l'immobile NSQ : c'est-à-dire, qu'elle est une demi-roulette semblable à la proposée, ou de même espèce ( parce que les diamètres AB, BN des cercles mobiles ont entr'eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles ), & posée dans une situation renversée ; ensorte que son sommet est en D. Pour le prouver, supposons que les diamètres des cercles mobiles se trouvent sur la droite OT menée à discrétion du centre O ; elle passera par les points touchans S, G ; & faisant AB ou TG. BN ou GS :: MG. GC, le point C sera à la développée, & de plus à la circonférence du cercle GCS ; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le sera aussi. Or à cause des angles égaux MGT, CGS, l'arc TM ou GB est à l'arc CS, comme le diamètre GT au diamètre GS :: OG. OS :: GB. NS ; & partant les arcs CS, SN sont égaux. Donc, &c.

## COROLLAIRE I.

101. IL est clair (*Art. 75.*) que la portion de roulette DC est égale à la droite CM ; & partant que DC est à sa tangente CG :: AB + BN. BN :: OB + ON. ON ; c'est à-dire, comme la somme des diamètres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, est au rayon du cercle immobile. Cette verité se dé-

couvre encore de la manière qui suit. A cause des triangles semblables  $CMm$ ,  $CGH$ , (Fig. 85. Pl. 5.) l'on aura  $Mm . GH$  ou  $EF :: MC . GC :: OA + OB$  ( $2a + 2b$ ).  $OB$  ( $b$ ). D'où il suit (comme dans l'art. 97.) que la portion de roulette  $AM$  est à la corde correspondante  $AE$ , comme la somme des diamètres du cercle générateur & de la base, est au rayon de la base.

## COROLLAIRE II.

102. **L**e trapèze  $MGHm$  (Fig. 85. Pl. 5.)  
 $= \frac{1}{2} GH + \frac{1}{2} Mm \times MG$ . Or  $CG$  ( $\frac{b}{2a+b} MG$ ),

$$CM \left( \frac{2a+2b}{2a+b} MG \right) :: GH . Mm = \frac{2a+2b}{b} GH.$$

Donc puisque  $GH = EF$ , &  $MG = EB$ , l'on aura  $MGHm = \frac{2a+3b}{2b} EF \times EB$  : c'est-à-dire,

que le trapèze  $MGHm$  sera toujours au triangle correspondant  $EBF :: 2a + 3b . b$ .

D'où il suit que l'espace  $MGBA$  renfermé par  $MG$ ,  $AB$  perpendiculaires à la roulette, par l'arc  $BG$  & par la portion de roulette  $MA$ , est au segment de cercle correspondant  $BEZA :: 2a + 3b . b$ .

## COROLLAIRE III.

103. **I**l est visible que la quadrature indéfinie de la roulette dépend de la quadrature du cercle ; mais si l'on prend  $OQ$  (Fig. 87. Pl. 5.) moyenne proportionnelle entre  $OK$ ,  $OA$ , & qu'on décrive de ce rayon l'arc  $QEM$  ; je dis que l'es-

pace ABEM renfermé par le diamètre AB, la corde BE, l'arc EM, & par la portion de roulette AM, est au triangle EKB ::  $2a + 3b.b$ . Car nommant l'arc AE ou GB,  $u$ ; le rayon OQ,  $\tau$ ; l'on aura OB ( $b$ ). OQ ( $\tau$ ) :: GB ( $u$ ). RQ ou ME =  $\frac{u\tau}{b}$ . Et partant l'espace RGBQ ou MGBE, c'est-à-dire,  $\frac{1}{2}GB + \frac{1}{2}RQ \times BQ = \frac{\tau\tau u - bb u}{2b}$ . Or (Art. 102.) l'espace de la roulette

MGBA =  $\frac{2a+3b}{b} \times BEZA = \frac{2a+3b}{b} \times EKB + \frac{2a+3b}{b} \times KEZA \left(\frac{au}{2}\right)$ . Si donc l'on retranche le précédent espace de celui-ci, il restera ABEM =  $\frac{2aau + 3abu + bbu - \tau\tau u}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times EKB = \frac{2a+3b}{b} EKB$ , puisque par la construction  $\tau\tau = 2aa + 3ab + bb$ . D'où l'on voit que cet espace a sa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il est le seul parmi tous les semblables.

En voici encore un autre qui a la même propriété. Si l'on retranche de l'espace ABEM le segment BEZA ( $\frac{1}{2}au + EKB$ ), il restera l'espace AZEM =  $\frac{2aau + 2abu + bbu - \tau\tau u}{2b} + \frac{2a+2b}{b} EKB = \frac{2a+2b}{b} EKB$  en faisant  $\tau\tau = 2aa + 2ab + bb$ : c'est-à-dire, que si l'on divise la demi-circonférence en deux également au point E, l'es-

pace AZEM sera au double du triangle EKB, c'est-à-dire, au quarré du rayon :: OK ( $a+b$ ). OB ( $b$ ).

## COROLLAIRE IV.

104. **S**i le cercle mobile AEB (*Fig. 88. Pl. 5.*) roule au dedans de l'immobile BGD, son diamètre AB devient négatif, de positif qu'il étoit auparavant; & partant il faut changer de signes les termes où il se rencontre avec une dimension impaire. D'où il suit, 1°. Que si l'on mène à discrétion la perpendiculaire MG à la roulette, & que l'on fasse OA ( $b-2a$ ). OB ( $b$ ) :: MG. GC. le point C sera (*Art. 100.*) à la développée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diamètre BN, au dedans de la circonférence NS concentrique à BD. 2°. Que si l'on décrit du centre O l'arc ME, la portion de roulette AM sera (*Art. 101.*) à la corde AE ::  $2b-2a.b$ . 3°. Que l'espace MGBA. est (*Art. 102.*) au segment BEZA ::  $3b-2a.b$ . 4°. Que si l'on prend  $OQ = \sqrt{2aa-3ab+bb}$ , c'est-à-dire, moyenne proportionnelle entre OK, OA; l'espace ABEM renfermé par la portion de roulette AM, l'arc ME, la corde EB, & le diamètre AB, sera (*Art. 103.*) au triangle EKB ::  $3b-2a.b$ . Mais que si l'on fait  $OQ$  ou  $OE = \sqrt{2aa-2ab+bb}$ , c'est-à-dire, que l'arc AE soit le quart de la circonférence; l'espace AZEM renfermé par la portion AM de roulette & par les deux arcs ME, AE, sera (*Ibid.*) au

triangle  $EKB$  qui est en ce cas la moitié du quarré du rayon ::  $2b - 2a \cdot b$ .

## COROLLAIRE V.

105. SI l'on conçoit que le rayon  $OB$  (*Fig. 86. Pl. 5.*) du cercle immobile devienne infini, l'arc  $BGD$  deviendra une ligne droite, & la courbe  $AMD$  deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diamètre  $AB$  du cercle mobile est nul par rapport à celui de l'immobile; il s'ensuit, 1°. Que  $MG \cdot GC :: b \cdot b$ . Puisque  $b \pm 2a = b$ , c'est-à-dire, que  $MG = GC$ ; & partant que si l'on prend  $BN = AB$ , & qu'on mene la droite  $NS$  parallèle à  $BD$ , la développée  $DCN$  sera formée par la révolution du cercle, qui a pour diamètre  $BN$ , sur la base  $NS$ . 2°. Que la portion de roulette  $AM$  (*Fig. 85. 88. Pl. 5.*) est à la corde correspondante  $AE :: 2b \cdot b$ . 3°. Que l'espace  $MGBA$  est au segment  $BEZA :: 3b \cdot b$ . 4°. Puisque  $BQ$  (*Fig. 87. 88. Pl. 5.*) ou  $\pm OQ \mp OB$ , que j'appelle  $x$ , est  $= \mp b \pm \sqrt{2aa \pm 3ab + bb}$ , d'où l'on tire (en ôtant les incommensurables)  $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$ ; l'on aura  $x = \frac{1}{2}a$ , en effaçant les termes où  $b$  ne se rencontre point, parce qu'ils sont nuls par rapport aux autres. C'est-à-dire, que si l'on prend dans la roulette ordinaire  $BP = \frac{1}{2} AB$ , & qu'on mene la droite  $PEM$  (*Fig. 83. Pl. 5.*) parallèle à la base  $BD$ ; l'espace  $AMEB$  sera triple du triangle  $EKB$ . On trouvera en opérant de la même manière, que si le point  $P$  tombe au centre  $K$ , l'espace  $AZEM$

renfermé par la portion de roulette  $AM$ , la droite  $ME$ , & l'arc  $AE$ , sera égal au carré du rayon. Ce que l'on a déjà démontré ci-devant art. 99.

## REMARQUE.

106. COMME les arcs  $DG$ ,  $GM$  (*Fig. 84. Pl. 5.*) sont toujours égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle  $DOG$  est aussi toujours à l'angle  $GKM :: GK : OG$ . C'est pourquoi l'origine  $D$  de la roulette  $DMA$ , les rayons  $OG$ ,  $GK$  des cercles générateurs, & le point touchant  $G$  étant donnés, si l'on veut déterminer dans cette position le point  $M$  qui décrit la roulette, il ne faut que tirer le rayon  $KM$ , en sorte que l'angle  $GKM$  soit à l'angle donné  $DOG :: OG : GK$ . Or je dis maintenant que cela se peut toujours faire géométriquement, lorsque le rapport de ces rayons se peut exprimer par nombres; & partant que la roulette  $DMA$  est alors géométrique.

Car supposant, par exemple, que  $OG : GK :: 13 : 5$ ; il est clair que l'angle  $MKG$  doit contenir deux fois l'angle donné  $DOG$ , & de plus  $\frac{1}{5}$  de cet angle. Toute difficulté se réduit donc à diviser l'angle  $DOG$  en cinq parties égales. Or c'est une chose connue par les Geomètres, qu'on peut toujours diviser géométriquement un angle ou un arc donné en tant de parties égales qu'on voudra; puisqu'on arrive toujours à quelque équation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette DMA est mécanique, ou ce qui est la même chose, qu'on ne peut déterminer géométriquement ses points M, lorsque la raison de OG à KG ne se peut exprimer par nombres, c'est-à-dire, lorsqu'elle est sourde.

Car (Fig. 89. Pl. 5.) toute ligne, soit mécanique soit géométrique, ou rentre en elle-même ou s'étend à l'infini; puisqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile ABC décrit par son point A dans sa première révolution la roulette ADE, cette roulette ne sera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la seconde EFG, puis la troisième GHI, & ainsi de suite jusqu'à ce que le point décrivant A retombe après plusieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors si on recommence à faire rouler le cercle mobile ABC, il décrira derechef la même ligne courbe, de sorte que toutes ces roulettes prises ensemble ne composent qu'une seule courbe ADEFGHI, &c. Or les rayons des cercles générateurs étant incommensurables, leurs circonférences le seront aussi; & par conséquent le point décrivant A du cercle mobile ABC ne pourra jamais retomber dans le point A de l'immobile, d'où il étoit parti, si grand que puisse être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependant qu'une même ligne courbe ADEFGHI, &c. Maintenant si l'on mène au travers du cercle



immobile une ligne droite indéfinie, il est clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne géométrique doit avoir au moins autant de dimensions que cette ligne peut être coupée en de différens points par une droite; il s'ensuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimensions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou transcendente.

### PROPOSITION III.

#### PROBLÈME.

107. **L** *Une ligne courbe BFC (Fig. 90. Pl. 5.) étant donnée, trouver une infinité de lignes AM, BN, EFO, dont elle soit la développée commune.*

Si l'on développe la courbe BFC en commençant par le point A, il est clair que tous les points A, B, F, du fil ABFC décriront dans ce mouvement des lignes courbes AM, BN, FO, qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée BFC. Mais il faut observer que la ligne FO n'ayant pour développée que la partie FC, son origine n'est pas en F; & que pour la trouver, il faut développer la partie restante BF, en commençant au point F, pour décrire la portion EF de la courbe EFO dont l'origine est en E, & qui a pour développée la courbe entière BFC.

Si

Si l'on veut trouver les points  $M$ ,  $N$ ,  $O$  sans se servir du fil  $ABFC$ , il n'y a qu'à prendre sur une tangente quelconque  $CM$ , autre que  $BA$ , les parties  $CM$ ,  $CN$ ,  $CO$  égales à  $ABFC$ ,  $BFC$ ,  $FC$ .

## COROLLAIRE.

108. **IL** est évident, 1°. Que les courbes  $AM$ ,  $BN$ ,  $EFO$  sont d'une nature très-différente entr'elles; puisque la courbe  $AM$  a dans son sommet  $A$  le rayon de sa développée égal à  $AB$ , au lieu que celui de la courbe  $BN$  est nul. Il est visible aussi par la figure même de la courbe  $EFO$  qu'elle est très-différente des courbes  $AM$ ,  $BN$ .

2°. Que les courbes  $AM$ ,  $BN$ ,  $EFO$  ne sont géométriques que lorsque la donnée  $BFC$  est géométrique & de plus rectifiable. Car si elle n'est pas géométrique, en prenant  $BK$  pour la coupée, on ne trouvera point géométriquement l'appliquée  $KC$ : & si elle n'est pas rectifiable, ayant mené la tangente  $CM$ , on ne pourra déterminer géométriquement les points  $M$ ,  $N$ ,  $O$  des courbes  $AM$ ,  $BN$ ,  $EFO$ ; puisqu'on ne peut trouver géométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe  $BFC$ , & à ses portions  $BF$ ,  $FC$ .

## REMARQUE.

109. **SI** l'on développe une ligne courbe  $BAC$  (*Fig. 91. Pl. 5.*) qui ait un point d'inflexion en  $A$ , en commençant par le point  $D$ , autre que le point d'inflexion; on formera par le développe-  
K

ment de la partie  $BAD$  la partie  $DEF$  ; & par celui de la partie  $DC$  , la partie restante  $DG$  : de sorte que  $FEDG$  sera la courbe entière formée par le développement de  $BAC$ . Or il est visible que cette courbe rebrousse chemin aux points  $D$  &  $E$  , avec cette différence qu'au point de rebroussement  $D$  les parties  $DE$  ,  $DG$  ont leur convexité opposée l'une à l'autre ; au lieu qu'au point  $E$  les parties  $DE$  ,  $EF$  sont concaves vers le même côté. On a enseigné dans la section précédente à trouver les points de rebroussement tels que  $D$  : il est question maintenant de déterminer les points  $E$  ; qu'on peut appeller points de rebroussement de la seconde sorte , & que personne , que je sçache , n'a encore considéré.

Pour en venir à bout , on menera à discrétion sur la partie  $DE$  deux perpendiculaires  $MN$  ,  $mn$  , terminées par la développée aux points  $N$  ,  $n$  , par lesquels on tirera deux autres perpendiculaires  $NH$  ,  $nH$  sur les premières  $NM$  ,  $nm$  ; ce qui formera deux petits secteurs  $MNm$  ,  $NHn$  qui seront semblables , puisque les angles  $MNm$  ,  $NHn$  sont égaux. On aura donc  $Nn : Mm :: NH . NM$ . Or dans le point d'inflexion  $A$  le rayon  $NH$  devient (*Art.* 81.) infini ou zero ; & le rayon  $MN$  , qui devient  $AE$  , demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebroussement  $E$  de la seconde sorte , la raison de la différence  $Nn$  du rayon  $MN$  de la développée , à la différence  $Mm$  de la courbe , devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant puisque (*Art.* 86. )  $Nn$

$$= \frac{-3dx dy ddy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dx dddy \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}, \& Mm$$

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ l'on aura } \frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2}{dx ddy^2}$$

$= 0$  ou  $\infty$  ; & multipliant par  $dx ddy^2$ , on trouvera la formule  $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2 = 0$  ou  $\infty$ , qui servira à déterminer les points de rebroussement de la seconde sorte.

On peut encore concevoir qu'une rebrousante DEF ( Fig. 92. 93. Pl. 5. ) ou HDEFG de la seconde sorte, ait pour développée une autre rebrousante BAC de la seconde sorte, telle que son point de rebroussement A réponde au point de rebroussement E, c'est-à-dire, qu'il soit situé sur le rayon de la développée qui part du point E. Or il est clair dans cette supposition, que le rayon EA de la développée sera toujours un *plus petit* ou un *plus grand* ; & partant que la diffé-

rence de  $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx ddy}$  expression générale (Art. 78.)

des rayons de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché E ; ce qui donne la même formule qu'auparavant : de sorte qu'elle est générale pour trouver les points de rebroussement de la seconde sorte. ( Consultez pour toute cette Section la Note cinquantieme. )

## SECTION VI.

*Usage du calcul des différences pour trouver les  
Caustiques par réflexion.*

## D É F I N I T I O N.

**S**I l'on conçoit qu'une infinité de rayons  $BA$ ,  $BM$ ,  $BD$ , (*Fig. 94. 95. Pl. 5.*) qui partent d'un point lumineux  $B$ , se réfléchissent à la rencontre d'une ligne courbe  $AMD$ , en sorte que les angles de réflexion soient égaux aux angles d'incidence; la ligne  $HFN$ , que touchent les rayons réfléchis ou leur prolongement  $AH$ ,  $MF$ ,  $DN$ , est appelée *Caustique par réflexion*.

## C O R O L L A I R E I.

**110** **S**I l'on prolonge  $HA$  en  $I$ , (*Fig. 94. Pl. 5.*) de sorte que  $AI = AB$ , & que l'on développe la caustique  $HFN$  en commençant au point  $I$ ; on décrira la courbe  $ILK$ , telle que la tangente  $FL$  sera (*Art. 75.*) continuellement égale à la portion  $FH$  de la caustique, plus à la droite  $HI$ . Et si l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi  $Bm$ ,  $mF$  infiniment près de  $BM$ ,  $MF$ , & qu'ayant prolongé  $Fm$  en  $l$ , on décrive des centres  $F$ ,  $B$  les petits arcs  $MO$ ,  $MR$ : on formera les petits triangles rectangles  $MOm$ ,  $MRm$ , qui seront semblables & égaux; car puisque l'angle  $OmM = FmD = RmM$ , & que de plus l'hypoténuse  $Mm$  est commune, les petits côtés

$Om$ ,  $Rm$  seront égaux entr'eux. Or puisque  $Om$  est la différence de  $LM$ , &  $Rm$  celle de  $BM$ , & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point  $M$ ; il s'ensuit que  $ML - IA$  ou  $AH + HF - MF$  somme (*Art. 96.*) de toutes les différences  $Om$  dans la portion de courbe  $AM$ , est  $= BM - BA$  somme (*Art. 96.*) de toutes les différences  $Rm$  dans la même portion  $AM$ . Donc la portion  $HF$  de la caustique  $HFN$  sera égale à  $BM - BA + MF - AH$ .

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident  $BA$  est plus grand ou moindre que  $BM$ , & que le réfléchi  $AH$  développe ou enveloppe la portion  $HF$  pour parvenir en  $MF$ : mais l'on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe, avant que de tomber sur l'autre. Par exemple,  $BM - BA$  (*Fig. 95. Pl. 5.*)  $= MF + FH - AH$ ; d'où l'on tire  $FH = BM - BA + AH - MF$ .

Si l'on décrit du centre  $B$  l'arc de cercle  $Ap$ ; (*Fig. 94. 95. Pl. 5.*) il est clair que  $pM$  sera la différence des rayons incidens  $BM$ ,  $BA$ . Et si l'on suppose que le point lumineux  $B$  devienne infiniment éloigné de la courbe  $AMD$ ; (*Fig. 96. Pl. 5.*) les rayons incidens  $BA$ ,  $BM$  deviendront parallèles, & l'arc  $AP$  deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

## COROLLAIRE. II.

III. SI l'on conçoit que la figure  $BAMD$  (*Fig. 94. Pl. 5.*) soit renversée sur le même plan, en sorte que le point  $B$  tombe sur le point  $I$ , & qu'ainsi la tangente en  $A$  de la courbe  $AMD$  dans sa première situation, la touche encore dans cette nouvelle; & qu'on fasse rouler la courbe  $aMd$  sur  $AMD$ , c'est-à-dire, sur elle-même, en sorte que les portions  $aM$ ,  $AM$  soient toujours égales: je dis le point  $B$  décrira dans ce mouvement une espèce de roulette  $ILK$  qui aura pour développée la caustique  $HFN$ .

Car il suit de la génération, 1°. Que la ligne  $LM$  tirée du point décrivant  $L$  au point touchant  $M$  sera (*Art. 43.*) perpendiculaire à la courbe  $ILK$ . 2°. Que  $La$  ou  $IA = BA$ , &  $LM = BM$ . 3°. Que les angles faits par les droites  $ML$ ,  $BM$  sur la tangente commune en  $M$  sont égaux; & partant que si l'on prolonge  $LM$  en  $F$ , le rayon  $MF$  sera le réfléchi de l'incident  $BM$ . D'où l'on voit que la perpendiculaire  $LF$  touche la caustique  $HFN$ : & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point  $L$ , il s'ensuit que la courbe  $ILK$  est formée par le développement de la caustique  $HFN$ , plus la droite  $HI$ .

Il suit de ceci que la portion  $FH$  ou  $FL - HI = BM + MF - BA - AH$ . Ce que l'on vient de démontrer d'une autre manière dans le Corollaire précédent.

## COROLLAIRE III.

112. *Si la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM ; il est clair que le point touchant N , & celui d'intersection V se confondront avec l'autre point touchant F : de sorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la caustique HFN , il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF , mF. Et en effet , si l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres , on verra naître par les intersections des réfléchis un polygone d'une infinité de côtés dont l'assemblage composera la caustique HFN.*

## PROPOSITION I.

## PROBLÈME GÉNÉRAL.

113. *LA nature de la courbe AMD , ( Fig. 97. Pl. 5. ) le point lumineux B , & le rayon incident BM étant donnés ; trouver sur le réfléchi MF donné de position , le point F où il touche la caustique.*

Ayant trouvé par la section précédente la longueur MC du rayon de la développée au point M , & pris l'arc Mm infiniment petit , on tirera les droites Bm , Cm , Fm ; on décrira des centres B , F les petits arcs MR , MO ; on mènera les perpendiculaires CE , Ce , CG , Cg sur les rayons incidens & réfléchis ; ensuite on nommera les données BM ,  $y$  ; ME ou MG ,  $a$ .

K 4



Cela posé, on prouvera, comme dans le Corollaire premier (*Art.* 110.), que les triangles  $MRm$ ,  $MOm$  sont semblables & égaux; & qu'ainsi  $MR = MO$ . Or à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion, l'on a aussi  $CE = CG$ ,  $Ce = Cg$ ; & partant  $CE - Ce$  ou  $EQ = CG - Cg$  ou  $SG$ . Donc à cause des triangles semblables  $BMR$  &  $BEQ$ ,  $FMO$  &  $FGS$ , l'on aura  $BM + BE$  ( $2y - a$ ).  $BM$  ( $y$ ) ::  $MR + EQ$  ou  $MO + GS$ .  $MR$  ou  $MO$  ::  $MG$  ( $a$ ).

$$MF = \frac{ay}{2y - a},$$

Si le point lumineux  $B$  tomboit de l'autre côté du point  $E$  par rapport au point  $M$ , ou (ce qui est la même chose) si la courbe  $AMD$  étoit convexe vers le point lumineux  $B$ ;  $y$  deviendrait négative de positive qu'elle étoit, & l'on auroit par conséquent  $MF = \frac{-ay}{-2y - a}$  ou  $\frac{ay}{2y + a}$ .

Si l'on suppose que  $y$  devienne infinie, c'est-à-dire, que le point  $B$  (*Fig.* 96, *Pl.* 5.) soit infiniment éloigné de la courbe  $AMD$ ; les rayons incidens seront parallèles entr'eux, & l'on aura  $MF = \frac{1}{2}a$ , parce que  $a$  est nulle par rapport à  $2y$ .

#### COROLLAIRE I.

114. COMME l'on ne trouve pour  $MF$  (*Fig.* 94, 95, *Pl.* 5.) qu'une seule valeur dans laquelle entre le rayon de la développée; il s'ensuit qu'une ligne courbe  $AMD$  ne peut avoir qu'une seule caustique  $HFN$  par réflexion, puisqu'elle (*Art.* 80.) n'a qu'une seule développée.

## COROLLAIRE II.

115. **L**ORSQUE AMD (*Fig. 97. Pl. 5.*) est géométrique, il est clair (*Art. 85.*) que sa développée l'est aussi, c'est-à-dire, que l'on trouve géométriquement tous les points C. D'où il suit que tous les points F de la caustique seront aussi déterminés géométriquement, c'est-à-dire, que la caustique HFN (*Fig. 94. 95.*) sera géométrique. Mais je dis de plus, que cette caustique sera toujours rectifiable; puisqu'il est évident (*Art. 110.* que l'on peut trouver avec le secours de la courbe AMD, qu'on suppose géométrique, des lignes droites égales à une de ses portions quelconques.

## COROLLAIRE III.

116. **S**I la courbe AMD (*Fig. 97. Pl. 5.*) est convexe vers le point lumineux B; la valeur de  $MF \left( \frac{ay}{2y+a} \right)$  sera toujours positive; & il faudra prendre par conséquent le point F du côté du point C, par rapport au point M, comme l'on a supposé en faisant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches seront divergens.

Mais si la courbe AMD est concave vers le point lumineux B, la valeur de  $MF \left( \frac{ay}{2y-a} \right)$  sera positive lorsque  $y$  surpasse  $\frac{1}{2}a$ , négative lorsqu'il est moindre, & infinie lorsqu'il est égal. D'où il suit que si l'on décrit un cercle qui ait

pour diamètre la moitié du rayon  $MC$  de la développée, les rayons réfléchis infiniment proches seront convergens lorsque le point lumineux  $B$  tombe au dehors de la circonférence, divergens lorsqu'il tombe au dedans, & enfin paralleles lorsqu'il tombe dessus.

## COROLLAIRE IV.

117. **S**I le rayon incident  $BM$  touche la courbe  $AMD$  au point  $M$ , l'on aura  $ME(a) = 0$ ; & partant  $MF = 0$ . Or comme le rayon réfléchi est alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la caustique consiste à toucher tous les rayons réfléchis; il s'ensuit qu'elle touchera aussi le rayon incident  $BM$  au point  $M$ : c'est-à-dire, que la caustique & la donnée auront la même tangente dans le point  $M$  qui leur sera commun.

Si le rayon  $MC$  de la développée est nul, on aura encore  $ME(a) = 0$ ; & partant  $MF = 0$ . D'où l'on voit que la donnée & la caustique sont entr'elles dans le point  $M$  qui leur est commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon  $CM$  de la développée est infini, le petit arc  $Mm$  deviendra une ligne droite, & l'on aura  $MF = \mp y$ ; puisque  $ME(a)$  étant infinie,  $y$  sera nul par rapport à  $a$ . Or comme cette valeur est négative lorsque le point  $B$  tombe du côté du point  $C$  par rapport à la ligne  $AMD$ , & positive lorsqu'il tombe du côté opposé; il s'ensuit que les rayons réfléchis infiniment pro-

DES INFINIMENT PETITS. 155  
 ches seront toujours divergens lorsque la ligne  
 A M D est droite.

COROLLAIRE V.

118. IL est évident que deux quelconques des  
 trois points B, C, F, étant donnés, on trou-  
 vera facilement le troisieme.

Soit, 1°, la courbe A M D (*Fig. 98. Pl. 5.*)  
 une parabole qui ait pour foyer le point lumineux  
 B. Il est clair par les élémens des sections con-  
 ques, que tous les rayons réfléchis seront paral-  
 leles à l'axe; & partant que M F sera toujours  
 infinie en quelque endroit que l'on suppose le  
 point M. On aura donc  $a = 2y$ : d'où il suit  
 que si l'on prend M E double de M B, qu'on  
 mene la perpendiculaire E C; elle ira couper  
 M C perpendiculaire à la courbe A M D, en un  
 point C qui sera à la développée de cette courbe.

Soit, 2°, la courbe A M D (*Fig. 99. Pl. 5.*)  
 une ellipse qui ait pour un de ses foyers le point  
 lumineux B. Il est encore clair que tous les rayons  
 réfléchis M F se rencontreront dans un même  
 point F qui sera l'autre foyer. Et si l'on nomme  
 M F,  $\tau$ ; l'on aura (*Art. 113.*)  $\tau = \frac{ay}{2y-a}$ ; d'où

l'on tire la cherchée M E ( $a$ )  $= \frac{2y\tau}{y+\tau}$ . Mais si

la courbe A M D est une hyperbole, le foyer F  
 tombera de l'autre côté; & partant M F ( $\tau$ ) de-  
 viendra négative: d'où il suit qu'on aura alors

M E ( $a$ )  $= \frac{-2y\tau}{y-\tau}$  ou  $\frac{2y\tau}{\tau-y}$ . Ce qui donne cette

construction qui sert aussi pour l'ellipse.

Soit prise  $ME$  (*Fig. 99. Pl. 5. Fig. 100. Pl. 6.*) quatrième proportionnelle au demi-axe traversant, & aux rayons incident & réfléchi; soit menée la perpendiculaire  $EC$ : elle ira couper la ligne  $MC$  perpendiculaire à la section, en un point  $C$  qui sera à la développée.

## EXEMPLE I.

119. **S**OIT la courbe  $AMD$  (*Fig. 101. Pl. 6.*) une parabole, dont les rayons incidens  $PM$  soient perpendiculaires sur son axe  $AP$ . Il faut trouver sur les réfléchis  $MF$  les points  $F$  où ils touchent la caustique  $AFK$ .

Il est clair que si l'on mène le rayon  $MC$  de la développée, & qu'on tire la perpendiculaire  $CG$  sur le rayon réfléchi  $MF$ , il faudra (*Art. 113.*) prendre  $MF$  égale à la moitié de  $MG$ . Mais cette construction se peut abréger, en considérant que si l'on mène  $MN$  parallèle à l'axe  $AP$ , & la droite  $ML$  au foyer  $L$ ; les angles  $LMP$ ,  $FMN$  seront égaux, puisque par la propriété de la parabole  $LMQ = QMN$ , & par la supposition  $PMQ = QMF$ . Si donc l'on ajoute de part & d'autre le même angle  $PMF$ , l'angle  $LMF$  sera égal à l'angle  $PMN$ , c'est-à-dire, droit. Or l'on vient de démontrer (*Art. 118. num. 1.*) que  $LH$  perpendiculaire sur  $ML$  rencontre le rayon  $MC$  de la développée en son milieu  $H$ . Si donc l'on mène  $MF$  parallèle & égale à  $LH$ , elle sera un des rayons réfléchis, & touchera en  $F$  la caustique  $AFK$ . Ce qu'il falloit trouver.

Si l'on suppose que le rayon réfléchi  $MF$  soit parallèle à l'axe  $AP$ , il est évident que le point  $F$  de la caustique sera le plus éloigné qu'il est possible de l'axe  $AP$ , puisque la tangente en ce point sera parallèle à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les caustiques, telles que  $AFK$ , formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à considérer que  $MP$  doit être alors égale à  $PQ$ . Ce qui donne  $dy = dx$ . Soit  $ax = yy$ , on aura

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dx, \text{ d'où l'on tire } AP(x) = \frac{1}{4}a :$$

c'est-à-dire, que si le point  $P$  tombe au foyer  $L$ , le rayon réfléchi  $MF$  sera parallèle à l'axe. Ce qui est d'ailleurs visible; puisque dans ce cas  $MP$  se confondant avec  $LM$ , il faut aussi que  $MF$  se confonde avec  $MN$ , &  $LH$  avec  $LQ$ . D'où l'on voit que  $MF$  est alors égale à  $ML$ ; & partant que si l'on mène  $FR$  perpendiculaire sur l'axe, on aura  $AR$  ou  $AL + MF = \frac{1}{4}a$ . On voit aussi que la portion  $AF$  de la caustique est égale en ce cas au paramètre, puisqu'elle est toujours (*Art. 110.*) égale à  $PM + MF$ .

Pour déterminer le point  $K$  où la caustique  $AFK$  rencontre l'axe  $AP$ , il faut chercher la valeur de  $MO$ , & l'égaliser à celle de  $MF$ ; car il est visible que le point  $F$  tombant en  $K$ , les lignes  $MF$ ,  $MO$  deviennent égales entr'elles. Nommant donc l'inconnue  $MO$ ,  $r$ ; l'angle  $PMO$  coupé en deux également par  $MQ$  perpendiculaire à la courbe, donnera  $MP(y)$ .  $MO(r)$

:: PQ ( $\frac{ydy}{dx}$ ). OQ =  $\frac{tdy}{dx}$ . Et partant OP =

$\frac{tdy+ydy}{dx} = \sqrt{tt-yy}$ , à cause du triangle rectangle MPO; & divisant de part & d'autre par

$t+y$ , on trouve  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}}$ , d'où l'on tire

$$MO(t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2} = MF(\frac{1}{2}a) = \frac{dx^2+dy^2}{-2ddy},$$

puisque (Art. 77.) ME (a) =  $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ . Ce qui

donne  $dy^2 - 2yddy = dx^2$  qui servira à trouver le point P, tel que menant le rayon incident PM & le réfléchi MF, ce dernier touche la caustique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP.

On a dans la parabole  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ ,  $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$ ; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve  $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$ ; d'où l'on tire AP (x) =  $\frac{1}{4}$  du paramètre.

Pour trouver la nature de la caustique AFK à la manière de Descartes, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée AR (u), à l'appliquée RF (z); ce qui se fait en cette sorte. Puisque  $MO(t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}$ ,

l'on aura  $PO(\frac{tdy+ydy}{dx}) = \frac{2ydx dy}{dx^2-dy^2}$ ; & à cause des triangles semblables MPO, MSF, on

formera ces proportions  $MO \left( \frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 - dy^2} \right) . MF$

$\left( \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy} \right)$  ou  $-2yddy . dx^2 - dy^2 :: MP (y)$

$. MS (y - z) = \frac{dx^2 - dy^2}{-2ddy} :: PO \left( \frac{2y dx dy}{dx^2 - dy^2} \right) .$

SF ou PR  $(u - x) = \frac{dx dy}{-ddy}$ . On aura donc ces

deux équations  $z = y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy}$ , &  $u = x +$

$\frac{dx dy}{-ddy}$ , qui serviront avec celle de la courbe don-

née à en former une nouvelle où  $x$  &  $y$  ne se trouveront plus, & qui exprimera par conséquent la relation de AR ( $u$ ) à FR ( $z$ ).

Lorsque la courbe AMD est une parabole, comme l'on a supposé dans cet exemple, on trou-

vera  $z = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$ , ou (en quarrant chaque membre)  $\frac{5}{4}x - 6xx + 4x^3 = zz$ , &  $u = 3x$ ; d'où l'on tire l'équation cherchée  $az z = \frac{4}{3}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{1}{3}aa u$  qui exprime la nature de la caustique AFK.

On peut remarquer que PR est toujours double de AP, puisque AR ( $u$ ) =  $3x$ ; ce qui fournit encore une nouvelle manière de déterminer sur le rayon réfléchi MF le point cherché F.

## EXEMPLE II.

120. SOIT la courbe AMD (Fig. 102. Pl. 6.) un demi-cercle qui ait pour diamètre la ligne AD, & pour centre le point C; soient les rayons incidens PM perpendiculaires sur AD.



Comme la développée du cercle se réunit en un seul point qui en est le centre , il s'ensuit (*Art.* 113.) que si l'on coupe le rayon  $CM$  en deux également au point  $H$ , & qu'on mene  $HF$  perpendiculaire sur le rayon réfléchi  $MF$ , il coupera ce rayon en un point  $F$ , où il touche la caustique  $AFK$ . Il est clair que le rayon réfléchi  $MF$  est égal à la moitié de l'incident  $PM$ ; d'où il suit, 1°. Que le point  $P$  tombant en  $C$ , le point  $F$  tombe en  $K$ , milieu de  $CB$ . 2°. Que la portion  $AF$  est triple de  $MF$ , & la caustique  $AFK$  triple de  $BK$ . On voit aussi que si l'on fait l'angle  $ACM$  demi-droit, le rayon réfléchi  $MF$  sera parallèle à  $AC$ ; & partant que le point  $F$  sera plus élevé au dessus du diamètre  $AD$ , que tout autre point de la caustique.

Le cercle qui a pour diamètre  $MH$ , passe par le point  $F$ ; puisque l'angle  $HFM$  est droit. Et si l'on décrit du centre  $C$  & du rayon  $CK$  ou  $CH$ , moitié de  $CM$ , le cercle  $KHG$ ; l'arc  $HF$  sera égal à l'arc  $HK$ : car l'angle  $CMF$  étant égal à  $CMP$  ou  $HCK$ , les arcs  $\frac{1}{2}HF$ ,  $HK$  qui mesurent ces angles dans les cercles  $MFH$ ,  $KHG$ , seront entr'eux comme les rayons  $\frac{1}{2}MH$ ,  $HC$  de ces cercles. D'où l'on voit que la caustique  $AFK$  est une roulette formée par la révolution du cercle mobile  $MFH$  autour de l'immobile  $KHG$ , dont l'origine est en  $K$ , & le sommet en  $A$ .

EXEMPLE

## EXEMPLE III.

121. SOIT la courbe AMD (*Fig. 103. Pl. 6.*) un cercle qui ait pour diamètre la ligne AD, & pour centre le point C; soit le point lumineux A, d'où partent tous les rayons incidens AM, l'une des extrémités de ce diamètre.

Si l'on mène du centre C sur le rayon incident AM la perpendiculaire CE: il est clair par la propriété du cercle, que le point E coupe en deux parties égales la corde AM; & qu'ainsi  $ME (a) = \frac{1}{2}y$ . On aura donc  $MF \left( \frac{ay}{2y-a} \right) = \frac{1}{3}y$ : c'est-à-dire, qu'il faut prendre le rayon réfléchi MF égal au tiers de l'incident AM. D'où l'on voit que  $DK = \frac{1}{3}AD$ ,  $CK = \frac{1}{3}CD$ , & que (*Art. 110.*) la caustique  $AFK = \frac{4}{3}AD$ , de même que sa portion  $AF = \frac{4}{3}AM$ . Si l'on prend  $AM = AC$ , le rayon réfléchi MF sera parallèle au diamètre AD; & par conséquent le point F sera le plus élevé qu'il soit possible au-dessus de ce diamètre.

Si l'on prend  $CH = \frac{1}{3}CM$ , & qu'on tire HF perpendiculaire sur MF; le point F sera à la caustique: car menant HL perpendiculaire sur AM, il est clair que  $ML = \frac{2}{3}ME = \frac{1}{3}AM$ , puisque  $MH = \frac{2}{3}CM$ . Le cercle qui a pour diamètre MH, passera donc par le point F de la caustique; & si l'on décrit un autre cercle KHQ du centre C, & du rayon CK ou CH, il lui sera égal, & l'arc HK sera égal à l'arc HF:

L

car dans le triangle isoscele  $CMA$  l'angle externe  $KCH = 2CMA = AMF$  ; & partant les arcs  $HK$ ,  $HF$  mesures de ces angles dans des cercles égaux , seront aussi égaux. D'où il suit que la caustique  $AFK$  est encore une roulette décrite par la révolution du cercle mobile  $MFH$  autour de l'immobile  $KHG$  , dont l'origine est en  $K$  , & le sommet en  $A$ .

On pourroit encore prouver ceci de cette autre manière. Si l'on décrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle  $AMD$  autour de celui-ci , en commençant au point  $A$  ; l'on a démontré dans la Corollaire second (*Art.* 111.) qu'elle aura pour développée la caustique  $AFK$ . Or (*Art.* 100.) cette développée est une roulette de même espece , c'est-à-dire , que les diamètres des cercles générateurs en seront égaux ; & on déterminera le point  $K$  en prenant  $CK$  troisième proportionnelle à  $CD + DA$  & à  $CD$  , c'est-à-dire , égale à  $\frac{1}{3} CD$ . Donc , &c.

#### EXEMPLE. IV.

122. **S**OIT la courbe  $AMD$  (*Fig.* 104. *Pl.* 6.) une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi-cercle  $NGM$  sur la droite  $BD$  , dont le sommet est en  $A$  , & l'origine en  $D$  ; soient les rayons incidens  $KM$  paralleles à l'axe  $AB$ .

Puisque (*Art.* 95.)  $MG$  est égale à la moitié du rayon de la développée , il s'ensuit (*Art.* 113.) que si l'on mene  $GF$  perpendiculaire sur le rayon

réfléchi  $MF$ , le point  $F$  sera à la caustique  $DFB$ . D'où l'on voit que  $MF$  doit être prise égale à  $KM$ .

Si l'on mène du centre  $H$  du cercle générateur  $MGN$  au point touchant  $G$ , & au point décrivant  $M$ , les rayons  $HG$ ,  $HM$ ; il est clair que  $HG$  sera perpendiculaire sur  $BD$ , & que l'angle  $GMH = MGH = GMK$ : d'où l'on voit que le rayon réfléchi  $MF$  passe par le centre  $H$ . Or le cercle qui a pour diamètre  $GH$ , passe aussi par le point  $F$ , puisque l'angle  $GFH$  est droit. Donc les arcs  $GN$ ,  $\frac{1}{2}GF$ , mesures du même angle  $GHN$ , seront entr'eux comme les diamètres  $MN$ ,  $GH$  de leurs cercles; & partant l'arc  $GF = GN = GB$ . Il est donc évident que la caustique  $DFB$  est une roulette décrite par la révolution entière du cercle  $GFH$  sur la droite  $BD$ .

## E X E M P L E V.

123. **S** O I T encore la courbe  $AMD$  (*Fig. 105. Pl. 6.*) une demi-roulette ordinaire, dont la base  $BD$  est égale à la demi-circonférence  $ANB$  du cercle générateur. Et soient à présent les rayons incidens  $PM$  parallèles à la base  $BD$ .

Si l'on mène  $GQ$  perpendiculaire sur  $PM$ , les triangles rectangles  $GQM$ ,  $BP N$  seront égaux & semblables; & partant  $MQ = PN$ . D'où l'on voit (*Art. 95. 113.*) qu'il faut prendre  $MF$  égale à l'appliquée correspondante  $PN$  dans le demi-cercle générateur  $ANB$ .

Afin que le point  $F$  soit le plus éloigné qu'il

est possible de l'axe  $AB$ , il faut que la tangente  $MF$  en ce point soit parallèle à cet axe. L'angle  $PMF$  sera donc alors droit, sa moitié  $PMG$  ou  $PNB$  demi-droit ; & partant le point  $P$  tombera dans le centre du cercle  $AND$ .

C'est une chose digne de remarque, que le point  $P$  approchant ensuite continuellement de l'extrémité  $B$ , le point  $F$  approche aussi de l'axe  $AB$  jusqu'à un certain point  $K$ , après quoi il s'en éloigne jusqu'en  $D$  ; de sorte que la caustique  $AFKFD$  a un point de rebroussement en  $K$ .

Pour le déterminer, je remarque (*Art.* 110. 111.) que la portion  $AF = PM + MF$ , la portion  $AFK = HL + LK$ , & la portion  $KF$  de la partie  $KFD$ , est  $= HL + LK - PM - MF$  : d'où l'on voit que  $HL + LK$  doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant  $AH$ ,  $x$  ;  $HI$ ,  $y$  ; l'arc  $AI$ ,  $u$  ; l'on aura  $HL + LK = u + 2y$ , dont la différence donne  $du + 2dy = 0$ , &  $\frac{adx}{y} + 2dy = 0$ , en mettant pour  $du$  la valeur  $\frac{adx}{y}$  : d'où l'on tire  $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$  à cause du cercle ; & partant  $AH(x) = \frac{1}{2}a$ .

## COROLLAIRE.

124. L'ESPACE  $AFM$  ou  $AFKFM$  renfermé par les portions de courbes  $AF$  ou  $AFKF$ ,  $AM$ , & par le rayon réfléchi  $MF$ , est égal à la moitié de l'espace circulaire  $APN$ . Car sa différence, qui est le secteur  $FMO$ , est égale à la moitié du rectangle  $PpSN$ , différence de

l'espace  $APN$  ; puisque les triangles rectangles  $MOm$ ,  $MRm$  étant égaux & semblables,  $MO$  sera égale à  $MR$  ou  $NS$  ou  $Pp$ , & que de plus  $MF = PN$ .

## E X E M P L E V I.

125. SOIT la courbe  $AMD$  (*Fig. 106. Pl. 6.*) une demi-roulette formée par la révolution du cercle  $MGN$  autour de son égal  $AGK$ , dont l'origine est en  $A$ , & le sommet en  $D$  ; soient les rayons incidens  $AM$  qui partent tous du point  $A$ . La ligne  $BH$  qui joint les centres des deux cercles générateurs, passe continuellement par le point touchant  $G$ , & les arcs  $GM$ ,  $GA$  comme aussi leurs cordes, sont toujours égaux ; ainsi l'angle  $HGM = BGA$ , & l'angle  $GMA = GAM$ . Or l'angle  $HGM + BGA = GMA + GAM$  ; puisqu'ajoutant de part & d'autre le même angle  $AGM$ , on en forme deux droits. Donc l'angle  $HGM$  sera toujours égal à l'angle  $GMA$  ; & partant aussi à l'angle de réflexion  $GMF$  : d'où il suit que  $MF$  passe toujours par le centre  $H$  du cercle mobile.

Maintenant si l'on mène les perpendiculaires  $CE$ ,  $GO$  sur le rayon incident  $AM$  : il est clair que  $MO = OA$ , & que  $OE = \frac{1}{2} OM$  ; puisque (*Art. 100.*) le point  $C$  étant à la développée,  $GC = \frac{1}{2} GM$ . On aura donc  $ME = \frac{2}{3} AM$ , c'est-à-dire,  $a = \frac{2}{3} y$  ; & par conséquent  $MF$

$(\frac{ay}{2y-a}) = \frac{1}{2} y$  : d'où l'on voit que si l'on mène  $GF$  perpendiculaire sur  $MF$ , le point  $F$  sera à la caustique  $AFK$ .

L 3

Le cercle qui a pour diamètre  $GH$ , passe par le point  $F$ ; & les arcs  $GM$ ,  $\frac{1}{2}GF$ , mesures du même angle  $GHM$ , étant entr'eux comme les diamètres  $MN$ ,  $GH$  de leurs cercles, l'arc  $GF$  sera égal à l'arc  $GM$ , & par conséquent à l'arc  $GA$ . D'où il est évident que la caustique  $AFK$  est une roulette décrite par la révolution du cercle mobile  $HFG$  autour de l'immobile  $AGK$ .

## COROLLAIRE.

126. **S**I l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point  $B$ , & pour rayon une droite égale à  $BH$  ou  $AK$ ; & qu'il y ait une infinité de droites parallèles à  $BD$  qui tombent sur sa circonférence: il est visible (*Art.* 120.) qu'elles formeront en se réfléchissant la même caustique  $AFK$ .

## EXEMPLE VII.

127. **S**OIT la courbe  $AMD$  (*Fig.* 107 *Pl.* 6.) une logarithmique spirale, avec les rayons incidents  $AM$  qui partent tous du centre  $A$ .

Si l'on mène par l'extrémité  $C$  du rayon de la développée la droite  $CA$  perpendiculaire sur le rayon incident  $AM$ , elle le rencontrera (*Art.* 91.) dans le centre  $A$ . C'est pourquoi  $AM(y) = a$ ; & partant  $MF(\frac{ay}{2y-a}) = y$ . Le triangle  $AMF$  sera donc isoscele; & comme les angles d'incidence & de réflexion  $AMT$ ,  $FMS$  sont égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle  $AFM$  est égal à l'angle  $AMT$ . D'où il est clair que la caustique

DES INFINIMENT PETITS. 167  
 AFK sera une logarithmique spirale qui ne différera de la proposée AMD que par sa position.

## PROPOSITION II.

### PROBLÈME.

128. **L**A caustique HF (Fig. 108. Pl. 6.) par réflexion étant donnée avec le point lumineux B ; trouver une infinité de courbes , telles que AM , dont elle soit caustique par réflexion.

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA le point A pour un des points de la courbe cherchée AM ; on décrira du centre B , de l'intervalle BA , l'arc de cercle AP , & d'un autre intervalle quelconque BM , un autre arc de cercle. Et ayant pris  $AH + HE = BM - BA$  ou  $PM$  , on développera la caustique HF en commençant au point E ; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon BM , en un point M qui fera ( Art. 110. ) à la courbe AM. Car par construction  $PM + MF = AH + HF$ .

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ses extrêmités en B & en F , on fera tendre ce fil par le moyen d'un stile placé en M , que l'on fera mouvoir , en sorte que l'on enveloppera par la partie MF de ce fil la caustique HF ; il est clair que ce stile décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA.



## AUTRE SOLUTION.

129. **A**YANT tiré à discrétion une tangente FM autre que HA, on cherchera sur elle un point M, telle que  $BM + MF = BA + AH + HF$ . Ce qui se fera en cette sorte.

Soit prise  $FK = BA + AH + HF$ , & divisant BK par le milieu en G, soit tirée la perpendiculaire GM : elle rencontrera la tangente FM au point cherché M. Car  $BM = MK$ .

Si le point B (*Fig. 109. Pl. 6.*) étoit infiniment éloigné de la courbe AM, c'est-à-dire, que les rayons incidens BA, BM fussent parallèles à une ligne droite donnée de position ; la première construction auroit toujours lieu, en considérant que les arcs de cercles décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires sur les rayons incidens. Mais cette dernière deviendrait inutile ; c'est pourquoi il faudroit lui substituer celle qui suit.

Soit prise  $FK = AH + HF$ . Ayant trouvé le point M tel que MP parallèle à AB perpendiculaire sur AP, soit égale à MK : il est clair (*Art. 110.*) que ce point sera à la courbe cherchée AM ; puisque  $PM + MF = AH + HF$ . Or cela se fait ainsi.

Soit menées KG perpendiculaire sur AP ; & ayant pris  $KO = KG$ , soient tirées KP parallèle à OG, & PM parallèle à GK : je dis que le point M sera celui qu'on cherche. Car à cause des triangles semblables GKO, PMK, l'on aura  $PM = MK$  ; puisque  $GK = KO$ .

Si la caustique HF se réunissoit en un point, la courbe AM deviendrait une section conique.

## COROLLAIRE I.

130. IL est clair que la courbe qui passe par tous les points K, est formée par le développement de la courbe HF en commençant en A, & qu'elle change de nature à mesure que le point A change de place sur la tangente AH. Donc puisque les courbes AM naissent toutes de ces courbes par la même construction, qui est géométrique; il s'ensuit (*Art.* 108.) qu'elles sont d'une nature différente entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF est géométrique & rectifiable.

## COROLLAIRE II.

131. UNE ligne courbe DN (*Fig.* 110. *Pl.* 6.) étant donnée avec un point lumineux C; trouver une infinité de lignes telles que AM, en sorte que les rayons réfléchis DA, NM se réunissent en un point donné B, après s'être réfléchis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM.

Si l'on imagine que la courbe HF soit la caustique de la donnée DN, formée par le point lumineux C; il est clair que cette ligne HF doit être aussi la caustique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B; de sorte que  $FK = BA + AH + HF$ , &  $NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC$ .

— CN, puisque (*Art.* 110.)  $HD + DC = HF + FN + NC$ . Ce qui donne cette construction.

Ayant pris à discrétion sur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM, on prendra sur un autre rayon réfléchi NM, tel qu'on voudra, la partie  $NK = BA + AD + DC - CN$ ; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-dessus, *art.* 129. (*Consultez la Note cinquante-unieme.*)



## SECTION VII.

*Usage du Calcul des différences pour trouver  
les Caustiques par réfraction.*

## D É F I N I T I O N.

**S**I l'on conçoit qu'une infinité de rayons  $BA$ ,  $BM$ ,  $BD$ , (*Fig. 111. Pl. 6.*) qui partent d'un même point lumineux  $B$ , se rompent à la rencontre d'une ligne courbe  $AMD$ , en s'approchant ou s'éloignant de ses perpendiculaires  $MC$ , en sorte que les sinus  $CE$  des angles d'incidence  $CME$ , soient toujours aux sinus  $CG$  des angles de réfraction  $CMG$ , en même raison donnée de  $m$  à  $n$ ; la ligne courbe  $HFN$  que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongemens  $AH$ ,  $MF$ ,  $DN$  (*Fig. 112. Pl. 6.*) est appelée *Caustique par réfraction*.

## C O R O L L A I R E.

132. **S**I l'on enveloppe la caustique  $HFN$  en commençant au point  $A$ , l'on décrira la courbe  $ALK$  telle que la tangente  $LF$  plus la portion  $FH$  de la caustique sera continuellement égale à la même droite  $AH$ . Et si l'on conçoit une autre tangente  $Fm$  infiniment proche de  $FML$ , avec un autre rayon d'incidence  $Bm$ , & qu'on décrive des centres  $F$ ,  $B$ , les petits arcs  $MO$ ,  $MR$ ; on formera deux petits triangles rectangles  $MRm$ ,

$MOm$  qui seront semblables aux deux autres  $MEC$ ,  $MGC$ , chacun à chacun ; puisque si l'on ôte des angles droits  $RME$ ,  $CMm$  le même angle  $EMm$ , les angles restans  $RMm$ ,  $EMC$  seront égaux ; & de même si l'on ôte des angles droits  $GMO$ ,  $CMm$  le même angle  $GMm$ , les restans  $OMm$ ,  $GMC$  seront égaux. C'est pourquoi  $Rm.Om :: CE.CG :: m.n$ . Or puisque  $Rm$  est la différence de  $BM$ , &  $Om$  celle de  $LM$  ; il s'en suit (*Art. 96.*) que  $BM - BA$  somme de toutes les différences  $Rm$  dans la portion de courbe  $AM$ , est à  $ML$  ou  $AH - MF - FH$  somme de toutes les différences  $Om$  dans la même portion  $AM$ , comme  $m$  est à  $n$  ; & partant que la portion  $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM$ .

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident  $BA$  est plus grand ou moindre que  $BM$ , & que le rompu  $AH$  enveloppe ou développe la portion  $HF$  : mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est à la différence des rayons rompus. (en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe avant que de tomber sur l'autre) comme  $m$  est à  $n$ . Par exemple, (*Fig. 112. Pl. 6.*)  $BA - BM.AH - MF - FH :: m.n$ . d'où l'on tire  $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$ .

Si l'on décrit du centre  $B$  (*Fig. 111. Pl. 6.*) l'arc de cercle  $AP$  ; il est clair que  $PM$  sera la

différence des rayons incidens  $BM$ ,  $BA$ . Et si l'on suppose que le point lumineux  $B$  devienne infiniment éloigné de la courbe  $AMD$ , les rayons incidens  $BA$ ,  $BM$  deviendront parallèles, & l'arc  $AP$  deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

## PROPOSITION I.

## PROBLÈME GÉNÉRAL.

133. LA nature de la courbe  $AMD$ , (Fig. III. Pl. 6.) le point lumineux  $B$ , & le rayon incident  $BM$  étant donnés ; trouver sur le rayon rompu  $MF$  donné de position, le point  $F$  où il touche la caustique par réfraction.

Ayant trouvé (Sect. 5.) la longueur  $MC$  du rayon de la développée au point donné  $M$ , & pris l'arc  $Mm$  infiniment petit, on tirera les droites  $Bm$ ,  $Cm$ ,  $Fm$  ; on décrira des centres  $B$ ,  $F$ , les petits arcs  $MR$ ,  $MO$  ; on menera les perpendiculaires  $CE$ ,  $Ce$ ,  $CG$ ,  $Cg$  sur les rayons incidens & rompus ; & l'on nommera les données  $BM$ ,  $y$  ;  $ME$ ,  $a$  ;  $MG$ ,  $b$  ; & le petit arc  $MR$ ,  $dx$ . Cela posé,

Les triangles rectangles semblables  $MEC$  &  $MRm$ ,  $MGC$  &  $MOm$ ,  $BMR$  &  $BQe$ , donneront  $ME(a) \cdot MG(b) :: MR(dx) \cdot MO = \frac{b dx}{a}$ . Et  $BM(y) \cdot BQ$  ou  $BE(y+a) :: MR(dx) \cdot Qe = \frac{adx + ydx}{y}$ . Or par la propriété de la réfraction  $Ce \cdot Cg :: CE \cdot CG :: m \cdot n$ . Et

partant  $m . n :: Ce - CE$  ou  $Qe \left( \frac{adx + ydx}{y} \right)$ .

$Cg - CG$  ou  $Sg = \frac{andx + nydx}{my}$ . Donc à cause des triangles rectangles semblables  $FMO$  &  $FSg$ , l'on aura  $MO - Sg \left( \frac{bmydx - anydx - aandx}{amy} \right)$ .

$MO \left( \frac{bdx}{a} \right) :: MS$  ou  $MG(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ .

Ce qui donne cette construction.

Soit fait vers  $CM$  (*Fig. 113. Pl. 6.*) l'angle  $ECH = GCM$ , & soit prise vers  $B$ ,  $MK = \frac{aa}{y}$ .

Je dis que si l'on fait  $HK . HE :: MG . MF$ . le point  $F$  sera à la caustique par réfraction.

Car à cause des triangles semblables  $CGM$ ,  $CEH$ , l'on aura  $CG . CE :: n . m :: MG(b)$ .

$EH = \frac{bm}{n}$ . D'où l'on tire  $HE - ME$  ou  $HM$

$= \frac{bm - an}{n}$ ,  $HM - MK$  ou  $HK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$ ;

& partant  $HK \left( \frac{bmy - any - aan}{ny} \right) . HE \left( \frac{bm}{n} \right) ::$

$MG(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ .

Il est clair que si la valeur de  $HK$  est négative, celle de  $MF$  le sera aussi : d'où il suit que le point  $M$  tombe entre les points  $G$ ,  $F$ , lorsque le point  $H$  se trouve entre les points  $K$ ,  $E$ .

Si le point lumineux  $B$  (*Fig. 111. 113. Pl. 6.*) tomboit du côté du point  $E$ , ou (ce qui est la même chose) si la courbe  $AMD$  étoit concave du

côté du point lumineux B;  $y$  deviendrait négative de positive qu'elle étoit auparavant, & l'on aurait par conséquent

$$MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan}$$

ou  $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ . Et la construction demeurerait la même.

Si l'on suppose que  $y$  devienne infinie : c'est-à-dire, que le point lumineux B soit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidents seront parallèles entr'eux, & l'on aura MF

$$= \frac{bbm}{bm - an}, \text{ parce que le terme } aan \text{ sera nul par}$$

rapport aux deux autres  $bmy, any$ ; & comme MK

( $\frac{aa}{y}$ ) s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire

$$HM . HE :: MG . MF.$$

## COROLLAIRE. I.

134. ON démontrera, de même que dans les caustiques par réflexion, ( Art. 114. 115. ) qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une seule caustique par réfraction, la raison de  $m$  à  $n$  étant donnée; laquelle caustique est toujours géométrique & rectifiable, lorsque la courbe proposée AMD est géométrique

## COROLLAIRE II.

135. SI le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G, & que CE soit égale à CG; il est clair que la caustique par réfraction se changera en caustique par



réflexion. En effet on aura  $MF \left( \frac{bbmy}{bmy - any + aan} \right)$   
 $= \frac{ay}{2y + a}$  ; puisque  $m = n$  , & que  $a$  devient négative de positive qu'elle étoit , & de plus égale à  $b$ . Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la section précédente.

Si  $m$  est infinie par rapport à  $n$  ; il est clair que le rayon rompu  $MF$  tombera sur la perpendiculaire  $CM$  : de sorte que la caustique par réfraction deviendra la développée. En effet on aura  $MF = b$  , qui devient en ce cas  $MC$  : c'est-à-dire , que le point  $F$  tombera sur le point  $C$  , qui est à la développée.

## COROLLAIRE III.

136. Si la courbe  $AMD$  est convexe vers le point lumineux  $B$  , & que la valeur de  $MF$   $\left( \frac{bbmy}{bmy - any - aan} \right)$  soit positive ; il est clair qu'il faudra prendre le point  $F$  du même côté du point  $G$  , par rapport au point  $M$  , comme on l'a supposé en faisant le calcul : & qu'au contraire si elle est négative , il le faudra prendre du côté opposé. Il en est de même lorsque la courbe  $AMD$  est concave vers le point  $B$  ; mais il faut observer qu'on aura pour lors  $MF = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ . D'où il suit que les rayons rompus infiniment proches sont convergens , lorsque la valeur de  $MF$  est positive dans le premier cas , & négative dans le second ; & qu'au contraire ils sont divergens lorsqu'elle

lorsqu'elle est négative dans le premier cas, & positive dans le second. Cela posé; il est évident;

1°. Que si la courbe  $AMD$  est convexe vers le point lumineux  $B$ , & que  $m$  soit moindre que  $n$ ; ou que si elle est concave vers ce point, & que  $m$  surpasse  $n$ : les rayons rompus infiniment proches seront toujours divergens.

2°. Que si la courbe  $AMD$  est convexe vers le point lumineux  $B$ , & que  $m$  surpasse  $n$ ; ou que si elle est concave vers ce point, & que  $m$  soit moindre que  $n$ : les rayons rompus infiniment proches seront convergens, lorsque  $MK (\frac{aa}{y})$  est moi-

dre que  $MH (\frac{bm}{n} - a$  ou  $a - \frac{bm}{n})$ ; divergens, lorsqu'elle est plus grande; & paralleles, lorsqu'elle est égale. Or comme  $MK = 0$ , lorsque les rayons incidens sont paralleles, il s'ensuit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches seront toujours convergens.

## COROLLAIRE IV.

137. Si le rayon incident  $BM$  touche la courbe  $AMD$  au point  $M$ , l'on aura  $ME (a) = 0$ ; & partant  $MF = b$ . Ce qui fait voir que le point  $F$  tombe alors sur le point  $G$ .

Si le rayon incident  $BM$  est perpendiculaire à la courbe  $AMD$ , les droites  $ME (a)$  &  $MG (b)$  deviendront égales chacune au rayon  $CM$  de la développée; puisqu'elles se confondent avec

lui. On aura donc  $MF = \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$ , qui de-

vient  $\frac{bm}{n}$  lorsque les rayons incidens sont parallèles entr'eux.

Si le rayon rompu  $MF$  touche la courbe  $AMD$  au point  $M$ , l'on aura  $MG(b) = 0$ . D'où l'on voit que la caustique touche alors la courbe donnée au point  $M$ .

Si le rayon  $CM$  de la développée est nul; les droites  $ME(a)$ ,  $MG(b)$  seront aussi égales à zero; & par conséquent les termes  $aan$ ,  $bbmy$  sont nuls par rapport aux autres  $bmy$ ,  $any$ . D'où il suit que  $MF = a$ ; & qu'ainsi la caustique a le point  $M$  commun avec la courbe donnée.

Si le rayon  $CM$  de la développée est infini; les droites  $ME(a)$ ,  $MG(b)$  seront aussi infinies; & par conséquent les termes  $bmy$ ,  $any$  seront nuls par rapport aux autres  $aan$ ,  $bbmy$ : de sorte qu'on aura  $MF = \frac{bbmy}{+aan}$ . Or ( *Art.* 133. ) comme cette quantité est négative, lorsque l'on suppose que le point  $F$  tombe de l'autre côté du point  $B$  par rapport à la ligne  $AMD$ , & qu'au contraire elle est positive lorsqu'on suppose qu'il tombe du même côté; il s'ensuit ( *Art.* 136. ) que l'on doit prendre le point  $F$  du même côté du point  $B$ , c'est-à-dire, que les rayons rompus infiniment proches sont divergens. Il est évident que le petit arc  $Mm$  devient alors une ligne droite, & que la construction précédente n'a plus de lieu. On peut lui substituer celle-ci, qui servira à déterminer les points des caustiques par réfraction, lorsque la ligne  $AMD$  est droite.

Ayant mené BO (*Fig. 114. Pl. 6.*) perpendiculaire sur le rayon incident BM, & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire sur AD; on tirera OL perpendiculaire sur le rayon rompu MG; & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle LOM, on fera  $BM \cdot BH :: ML \cdot MF$ . Je dis que le point F sera à la caustique par réfraction.

Car les triangles rectangles MEC & MBO, MGC & MLO seront toujours semblables de quelque grandeur que l'on suppose CM; & partant lorsqu'elle devient infinie, l'on aura encore  $ME(a) \cdot MG(b) :: BM(y) \cdot ML = \frac{by}{a}$ . Et à cause des triangles semblables OLM, OBH, l'on aura aussi  $OL \cdot OB(n \cdot m)^\frac{1}{2} : ML(\frac{by}{a})$ .  $BH = \frac{bmy}{an}$ . D'où l'on voit que  $BM(y) \cdot BH(\frac{bmy}{an}) :: ML(\frac{by}{a}) \cdot MF(\frac{bbmy}{aan})$ .

## COROLLAIRE V.

138. IL est clair que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on peut facilement trouver le troisième.

## EXEMPLE I.

139. SOIT la courbe AMD (*Fig. 115. Pl. 6.*) un quart de cercle qui ait pour centre le point C; soient les rayons incidens BA, BM, BD parallèles entr'eux, & perpendiculaires sur CD; soit

M<sub>2</sub>

enfin la raison de  $m$  à  $n$ , comme 3 à 2, qui est celle que souffrent les rayons de lumière en passant de l'air dans le verre. Puisque la développée du cercle  $AMD$  se réunit en un point  $C$  qui en est le centre, il s'ensuit que si l'on décrit une demi-circonférence  $MEC$  qui ait pour diamètre le rayon  $CM$ , & qu'on prenne la corde  $CG = \frac{2}{3}CE$ ; la ligne  $MG$  sera le rayon rompu, sur lequel on déterminera le point  $F$ , comme l'on a enseigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point  $H$  où le rayon incident  $BA$  perpendiculaire sur  $AMD$  touche la caustique par réfraction, l'on aura (*Art.* 137.)  $AH$  ( $\frac{bm}{m-n}$ )  $= 3b = 3CA$ . Et si l'on décrit une demi-circonférence  $CND$  qui ait pour diamètre le rayon  $CD$ , & qu'on prenne la corde  $CN = \frac{2}{3}CD$ ; il est clair (*Art.* 137.) que le point  $N$  sera à la caustique par réfraction, puisque le rayon incident  $BD$  touche le cercle  $AMD$  au point  $D$ .

Si l'on mene  $AP$  parallèle à  $CD$ ; il est visible (*Art.* 132.) que la portion  $FH = AH - MF - \frac{2}{3}PM$ : de sorte que la caustique entière  $HFN = \frac{2}{3}CA - DN = \frac{7-\sqrt{5}}{3}CA$ .

Si le quart de cercle  $AMD$  (*Fig.* 116. *Pl.* 6.) est concave vers les rayons incidents  $BM$ , & que la raison de  $m$  à  $n$  soit de 2 à 3; on prendra sur la demi-circonférence  $CEM$  qui a pour diamètre le rayon  $CM$ , la corde  $CG = \frac{1}{3}CE$ , & on tirera le rayon rompu  $MG$  sur lequel on

déterminera le point F par la construction générale art. 133.

On aura (Art. 137.)  $AH \left( \frac{bm}{m-n} \right) = -2b$  ; c'est-à-dire, que AH fera du côté (Art. 136.) de la convexité du quart de cercle AMD, & double du rayon AC. Et si l'on suppose que CG ou  $\frac{2}{3}$  CE soit égale à CM ; il est manifeste que le rayon rompu MF touchera le cercle AMD en M, puisqu'alors le point G se confondra avec le point M. D'où il suit que si l'on prend  $CE = \frac{2}{3} CD$ , le point M tombera au point N où la caustique HFN (Art. 137.) touche le quart de cercle AMD. Mais lorsque CE surpasse  $\frac{2}{3} CD$ , les rayons incidens BM ne pourront plus se rompre, c'est-à-dire, passer du verre dans l'air ; puisqu'il est impossible que CG perpendiculaire sur le rayon rompu MG, soit plus grande que CM : de sorte que tous les rayons qui tomberont sur la partie ND se réfléchiront.

Si l'on mene AP parallèle à CD ; il est clair (Art. 132.) que la portion  $FH = AH - MF + \frac{1}{2} PM$  : de sorte que menant NK parallèle à CD, la caustique entière  $HFN = 2CA + \frac{1}{2} AK = \frac{7-\sqrt{5}}{2} CA$ .

#### EXEMPLE II.

140. SOIT la courbe AMD (Fig. 117. Pl. 6.) une logarithmique spirale qui ait pour centre le point A, duquel partent tous les rayons incidens AM.

M 3

Il est clair (*Art.* 91.) que le point E tombe sur le point A, c'est-à-dire, que  $a = y$ . Si donc l'on met à la place de  $a$  sa valeur  $y$  dans

$\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$  valeur (*Art.* 133.) de MF lorsque la courbe est concave du côté du point lumineux; on aura  $MF = b$ ; d'où l'on voit que le point F tombe sur le point G.

Si l'on mène la droite AG, & la tangente MT; l'angle AGO complément à deux droits de l'angle AGM, sera égal à l'angle AMT. Car le cercle qui a pour diamètre la ligne CM, passant par les points A & G, les angles AGO, AMT ont chacun pour mesure la moitié du même arc AM. Il est donc évident que la caustique AGN est la même logarithmique spirale que la donnée AMD, & qu'elle n'en diffère que par sa position.

## PROPOSITION II.

### PROBLÈME.

141. LA caustique HF (*Fig.* 118. *Pl.* 6.) par réfraction étant donnée avec son point lumineux B, & la raison de  $m$  à  $n$ ; trouver une infinité de courbes telles que AM, dont elle soit caustique par réfraction.

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA, le point A pour un des points de la courbe AM, on décrira du centre B & de l'intervalle BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervalle quelconque BM un autre arc de cercle;

& ayant pris  $AE = \frac{n}{m} PM$ , on décrira en enveloppant la caustique HF une ligne courbe EM, qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervalle BM, en un point M qui sera à la courbe cherchée. Car (Art. 132.)  $PM . AE$  ou  $ML :: m . n$ .

## AUTRE SOLUTION.

142. ON cherchera sur une tangente quelconque FM, autre que HA, le point M tel que  $HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA$ . C'est pourquoi si l'on prend  $FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$ , & qu'on trouve sur FK un point M tel que  $MK = \frac{n}{m} BM$ , il sera (Art. 132.) celui qu'on cherche. Or cela se peut faire en décrivant une ligne courbe GM (Fig. 119. Pl. 6.) telle que menant d'un de ses points quelconque M aux points donnés B, K, les droites MB, MK, elles aient toujours entr'elles un même rapport que  $m$  à  $n$ . Il n'est donc question que de trouver la nature de ce lieu.

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire sur BK, & nommée la donnée BK,  $a$ ; & les indéterminées BR,  $x$ ; RM,  $y$ . Les triangles rectangles BRM, KRM donneront  $BM = \sqrt{xx + yy}$ , &  $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$ : de sorte que pour remplir la condition du Problème, l'on aura  $\sqrt{xx + yy} . \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} :: m . n$ . D'où l'on tire  $yy = \frac{2amnx - aamm}{mm - nn} - xx$ , qui est



un lieu au cercle que l'on construira ainsi.

Soit prise  $BG = \frac{am}{m+n}$ , &  $BQ = \frac{am}{m-n}$ , & soit décrit du diamètre  $GQ$  la demi-circonférence  $GMQ$ : je dis qu'elle sera le lieu requis. Car ayant  $QR$  ou  $BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$ , &  $RG$  ou  $BR - BG = x - \frac{am}{m+n}$ ; la propriété du cercle, qui donne  $QR \times RG = RM^2$ , donnera en termes analytiques  $xy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$ .

Si les rayons incidens  $BA, BM$  (*Fig. 120. Pl. 6.*) sont parallèles à une droite donnée de position, la première solution aura toujours lieu; mais celle-ci deviendra inutile, & on pourra lui substituer la suivante.

Soit prise  $FL = AH - HF$ ; & ayant mené  $LG$  parallèle à  $AB$  & perpendiculaire sur  $AP$ , on prendra  $LO = \frac{n}{m} LG$ , & on tirera  $LP$  parallèle à  $GO$ , &  $PM$  parallèle à  $GL$ . Il est clair (*Art. 132.*) que le point  $M$  sera celui qu'on cherche; car puisque  $LO = \frac{n}{m} LG$ ,  $ML = \frac{n}{m} PM$ .

Si la caustique  $FH$  par réfraction, se réunit en un point; les courbes  $AM$  deviennent les Ovals de *Descartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Géomètres.

#### COROLLAIRE I.

143. ON démontre de même que dans les caustiques par réflexion, (*Art. 130.*) que les cour-

bes AM sont de nature différente entr'elles, & qu'elles ne sont géométriques que lorsque la caustique HF par réfraction est géométrique & rectifiable.

## COROLLAIRE II.

144. UNE ligne courbe AM (*Fig. 121. Pl. 7.*) étant donnée avec le point lumineux B, & la raison de  $m$  à  $n$ ; trouver une infinité de lignes telles que DN, en sorte que les rayons rompus MN se rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes DN pour se réunir en un point donné C.

Si l'on imagine que la ligne courbe HF soit la caustique par réfraction de la courbe donnée AM, formée par le point lumineux B; il est clair que cette même ligne HF doit être aussi la caustique par réfraction de la courbe cherchée DN, ayant pour point lumineux le point donné C. C'est pour-

quoi (*Art. 132.*)  $\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MF$

+ FH, &  $NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC$ ;

& partant  $\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MN + HD$

$- \frac{n}{m} DC + \frac{n}{m} NC$ ; & transposant à l'ordinaire,

$\frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM + \frac{n}{m} DC + AD = MN +$

$\frac{n}{m} NC$ . Ce qui donne cette construction.

Ayant pris à discrétion sur un rayon rompu quelconque AH le point D pour un de ceux de la courbe cherchée DN, on prendra sur un autre

rayon rompu quelconque  $MF$  la partie  $MK = \frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD$ ; & ayant trouvé, comme ci-dessus (*Art.* 142.), le point  $N$  tel que  $NK = \frac{n}{m}NC$ , il est clair (*Art.* 132.) qu'il sera à la courbe  $DN$ .

### COROLLAIRE GÉNÉRAL.

*Pour les trois Sections précédentes.*

145. IL est manifeste (*Art.* 80. 85. 107. 108. 114. 115. 128. 129. 134. 143.) qu'une ligne courbe n'a qu'une seule développée, qu'une seule caustique par réflexion, & qu'une seule par réfraction, le point lumineux & le rapport des sinus étant donnés, lesquelles lignes sont toujours géométriques & rectifiables lorsque cette courbe est géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la développée, & l'une & l'autre caustique dans le même rapport des sinus, & dans la même position du point lumineux, commune à une infinité de lignes très différentes entr'elles, & qui ne sont géométriques que lorsque cette courbe est géométrique & rectifiable (*Consultez la Note cinquante-deuxième.*)



## SECTION VIII.

*Usage du Calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.*

## PROPOSITION I.

## PROBLÈME.

146. **S**OIT donnée une ligne quelconque  $AMB$ , ( Fig. 122. Pl. 7. ) qui ait pour axe la droite  $AP$ ; soient de plus entendues une infinité de paraboles  $AMC$ ,  $A\mathfrak{m}C$ , qui passent toutes par le point  $A$ , & qui aient pour axes les appliquées  $PM$ ,  $p\mathfrak{m}$ . Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.

Il est clair que le point touchant de chaque parabole  $AMC$  est le point d'intersection  $C$  où la parabole  $A\mathfrak{m}C$ , qui en est infiniment proche, la coupe. Cela posé, & ayant mené  $CK$  parallèle à  $MP$ , soient nommées les données  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; & les inconnues  $AK$ ,  $u$ ;  $KC$ ,  $z$ . On aura par la propriété de la parabole,  $\overline{AP}^2 (xx) \cdot \overline{PK}^2 (uu - 2ux + xx) :: MP (y) \cdot MP - CK (y - z)$ . Ce qui donne  $zxx = 2uxy - uuy$ , qui est l'équation commune à toutes les paraboles, telles que  $AMC$ . Or je remarque que les inconnues  $AK (u)$  &  $KC (z)$  demeurent les mêmes, pendant que les données  $AP (x)$

&  $PM(y)$  varient en devenant  $Ap$  &  $pm$ ; & qu'il n'arrive que  $KC(z)$  demeure la même, que lorsque le point  $C$  est celui d'intersection: car il est visible que par tout ailleurs la droite  $KC$  coupera les deux paraboles  $AMC$ ,  $AmC$  en deux différens points, & qu'elle aura par conséquent deux valeurs qui répondront à la même de  $AK$ . C'est pourquoi si l'on traite  $u$  &  $z$  comme constantes, en prenant la différence de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point  $C$  à être celui d'intersection. On aura donc  $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$ : d'où l'on tire l'inconnue  $AK(u) = \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}$  en

mettant pour  $z$  la valeur  $\frac{2uxy - uuy}{xx}$ ; & la nature de la courbe  $AMB$  étant donnée, on trouvera une valeur de  $dy$  en  $dx$ , laquelle étant substituée dans la valeur de  $AK$ , cette inconnue sera enfin exprimée en termes entièrement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

Si au lieu des paraboles  $AMC$ , on proposoit d'autres lignes droites ou courbes dont la position fût déterminée, on résoudroit toujours le Problème à peu près de la même manière: & c'est ce que l'on verra dans les Propositions suivantes.

#### EXEMPLE.

147. QUE l'équation  $xx = 4ay - 4yy$  exprime la nature de la courbe  $AMB$ : elle sera une demi-ellipse qui aura pour petit axe, la droite  $AB$

$= a$  perpendiculaire sur AP, & dont le grand axe sera double du petit.

On trouve  $x dx = 2ady - 4y dy$ ; & partant AK  

$$\left( \frac{2xxdy - 2xydx}{x dy - 2y dx} \right) = \frac{ax}{y} = u$$
. D'où il suit que si l'on prend AK quatrième proportionnelle à MP, PA, AB, & qu'on mène KC perpendiculaire sur AK; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C.

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui passe par tous les points C ainsi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la relation de AK ( $u$ ) à KC ( $z$ ) en cette sorte. Mettant à la place de  $u$  sa valeur  $\frac{ax}{y}$

dans  $zxx = zuxy - uuy$ , l'on en tire  $y = \frac{aa}{2a - z}$ ;

& partant  $x$  ou  $\frac{uy}{a} = \frac{au}{2a - z}$ . Si donc l'on met ces valeurs à la place de  $x$  &  $y$  dans  $xx = 4ay - 4yy$ , on formera l'équation  $uu = 4aa - 4az$  où  $x$  &  $y$  ne se rencontrent plus, & qui exprime la relation de AK à KC. D'où l'on voit que la courbe cherchée est une parabole qui a pour axe la ligne BA, pour sommet le point B, pour foyer le point A, & dont le paramètre par conséquent est quadruple de AB.

On vient de trouver  $y = \frac{aa}{2a - z}$ , d'où l'on tire

$KC(z) = \frac{2ay - aa}{y}$ . Or comme cette valeur est positive lorsque  $2y$  surpasse  $a$ , négative lorsqu'il est moindre, & nulle lorsqu'il lui est égal : il s'en-

fuit que le point touchant  $C$  tombe au-dessus de  $AP$  dans le premier cas, comme l'on avoit supposé en faisant le calcul; au dessous dans le second, & enfin sur  $AP$  dans le troisieme.

Si l'on mene la droite  $AC$  qui coupe  $MP$  en  $G$ ; je dis que  $MG = BQ$ , & que le point  $G$  est le foyer de la parabole  $AMC$ . Car 1°.  $AK(\frac{ax}{y})$ .

$KC(\frac{2ay - aa}{y}) :: AP(x) \cdot PG = 2y - a$ . & partant  $MG = a - y = BQ$ . 2°. Le paramètre de la parabole  $AMC$ , est  $= 4a - 4y$  en mettant pour  $xx$  sa valeur  $4ay - 4yy$ ; & partant  $MG(a - y)$  est la quatrieme partie du paramètre: d'où l'on voit que le point  $G$  est le foyer de la parabole; & qu'ainsi l'angle  $BAC$  doit être divisé en deux également par la tangente en  $A$ .

Il fuit de ce que le paramètre de la parabole  $AMC$  est quadruple de  $BQ$ , que le sommet  $M$  tombant en  $A$ , le paramètre sera quadruple de  $AB$ , & qu'ainsi la parabole, qui a pour sommet le point  $A$ , est asymptotique de celle qui passe par tous les points  $C$ .

Comme la parabole  $BC$  touche toutes les paraboles telles que  $AMC$ ; il est clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée  $AC$  en des points qui seront plus proches du point  $A$  que le point  $C$ . Or l'on démontre dans la Balistique (en supposant que  $AK$  soit horizontale) que toutes les paraboles, telles que  $AMC$ , marquent le chemin que décrivent en l'air des Bom-

bes qui seroient jettées par un Mortier placé en A dans toutes les élévations possibles avec la même force. D'où il suit que si l'on mène une droite qui divise par le milieu l'angle BAC; elle marquera la position que doit avoir le Mortier, afin que la Bombe qu'il jette, tombe sur le plan AC donné de position, en un point C plus éloigné du Mortier, qu'en toute autre élévation.

## PROPOSITION II.

## PROBLÈME.

148. *SOIT donnée une courbe quelconque AM, (Fig. 123. Pl. 7.) qui ait pour axe la droite AP; trouver une autre courbe BC telle qu'ayant mené à discrétion l'appliquée PM, & la perpendiculaire PC à cette courbe, ces deux lignes PM, PC soient toujours égales entr'elles:*

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p, & des rayons PC, pC égaux à PM, pm; il est clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle est le point d'intersection où le cercle qui en est infiniment proche, le coupe. Cela posé, soit menée CK perpendiculaire sur AP; soient nommées les données & variables AP, x; PM ou PC, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; & l'on aura par la propriété du cercle  $PC^2 = PK^2 + KC^2$ , c'est-à-dire, en termes analytiques  $yy = xx - 2ux + uu + zz$ , qui est l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence est  $2ydy = 2xdx -$



$2udx$  : d'où l'on tire  $PK (x-u) = \frac{ydy}{dx}$  ; ce qui donne cette construction générale.

Soit menée  $MQ$  perpendiculaire à la courbe  $AM$  ; & ayant pris  $PK = PQ$ , soit tirée  $KC$  parallèle à  $PM$  : je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre  $P$  & du rayon  $PC = PM$  au point  $C$ , où il touche la courbe cherchée  $BC$ .

Ce qui est évident ; puisque  $PQ = \frac{ydy}{dx}$ .

On peut encore trouver la valeur de  $PK$  de cette autre manière.

Ayant mené  $PO$  perpendiculaire sur  $Cp$ , les triangles rectangles  $pOP$ ,  $PKC$  seront semblables ; & partant  $Pp (dx) \cdot Op (dy) :: PC (y) \cdot PK = \frac{ydy}{dx}$ .

Lorsque  $PQ = PM$ , il est clair que le cercle décrit du rayon  $PC$ , touchera  $KC$  au point  $K$  ; de sorte que le point touchant  $C$  se confondra avec le point  $K$ , & tombera par conséquent sur l'axe.

Mais lorsque  $PQ$  surpassera  $PM$ , le cercle décrit du rayon  $PC$  ne pourra toucher la courbe  $BC$  ; puisqu'il ne pourra rencontrer la droite  $KC$  en aucun point.

#### EXEMPLE.

149. **S**oit la courbe donnée  $AM$ , (*Fig. 123. Pl. 7.*) une parabole qui ait pour équation  $ax = yy$ . On aura  $PQ$  ou  $PK (x-u) = \frac{1}{2}a$  ; & par conséquent  $x = \frac{1}{2}a + u$ , &  $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}au$  à cause

cause du triangle rectangle PKC. Or si l'on met ces valeurs dans  $ax = yy$ , on formera l'équation  $\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa + \tau\tau$  ou  $\frac{1}{4}aa + au = \tau\tau$ , qui exprime la nature de la courbe BC. D'où il est clair que cette courbe est la même parabole que AM; puisqu'elles ont l'une & l'autre le même paramètre  $a$ , & que son sommet B est éloigné du sommet A de la distance  $BA = \frac{1}{4}a$ .

## PROPOSITION III.

## PROBLÈME.

150. **S**OIT donnée une ligne courbe quelconque AM, (Fig. 124. Pl. 7.) qui ait pour diamètre la droite AP, & dont les appliquées PM, pm soient parallèles à la droite AQ donnée de position; & ayant mené MQ, mq parallèles à AP, soient tirées les droites PQC, pqC. On demande la courbe A. qui a pour tangentes toutes ces droites: ou, ce qui est la même chose, il s'agit de déterminer sur chaque droite PQC le point touchant C.

Ayant imaginé une autre tangente pqC infiniment proche de PQC, & mené CK parallèle à AQ, on nommera les données & variables AP,  $x$ ; PM ou AQ,  $y$ ; les inconnues & constantes AK,  $u$ ; KC,  $\tau$ ; & les triangles semblables PAQ, PKC donneront  $AP(x) \cdot AQ(y) : PK(x + u) \cdot KC(\tau) = y + \frac{uy}{x}$ . qui est l'équation commune à toutes les droites, telles que KC. Sa différence est  $dy + \frac{uxdy - uydx}{xx} = 0$ , d'où l'on

N

tire  $AK(u) = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$ . Ce qui donne cette construction générale.

Soit menée la tangente  $MT$ , & soit prise  $AK$  troisieme proportionnelle à  $AT$ ,  $AP$  : je dis que si l'on mene  $KC$  parallele à  $AQ$ , elle ira couper la droite  $PQC$  au point cherché  $C$ .

$$\text{Car } AT\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right) : AP(x) :: AP(x) :$$

$$AK = \frac{xxdy}{ydx - xdy}.$$

## EXEMPLE I.

151. **S**OIT la courbe donnée  $AM$ , (*Fig. 124. Pl. 7.*) une parabole qui ait pour équation  $ax = yy$ . On aura  $AT = AP$ ; d'où il suit que  $AK(u) = x$ , c'est-à-dire, que le point  $K$  tombe sur le point  $T$ . Si l'on veut à présent avoir une équation qui exprime la relation de  $AK(u)$  à  $KC(z)$ ; on trouvera  $KC(z) = 2y$ , puisque l'on vient de trouver que  $PK$  est double de  $AP$ . Mettant donc à la place de  $x$  &  $y$  leurs valeurs  $u$  &  $\frac{1}{2}z$  dans  $ax = yy$ , on aura  $4au = zz$  : d'où l'on voit que la courbe  $AC$  est une parabole qui a pour sommet le point  $A$ , & pour paramètre une ligne quadruple du paramètre de la parabole  $AM$ .

## EXEMPLE II.

152. **S**OIT la courbe donnée  $AM$ , (*Fig. 125. Pl. 7.*) un quart de cercle  $BM D$  qui ait pour centre le point  $A$ , & pour rayon la ligne  $AB$  ou  $AD$ , que j'appelle  $a$ . Il est clair que  $PQ$  est tou-

jours égale au rayon AM ou AB, c'est-à-dire, qu'elle est par-tout la même : de sorte que l'on peut concevoir que ses extrémités P, Q glissent le long des côtés BA, AD de l'angle droit BAD.

On aura  $AK(u) = \frac{x^3}{a^2}$ , puisque  $AT = \frac{aa}{x}$ ; &

les parallèles KC, AQ donneront  $AP(x) \cdot PQ$

$(a) :: AK(\frac{x^3}{a^2}) QC = \frac{x^2}{a}$ . D'où l'on voit que

pour avoir le point touchant C, il n'y a qu'à prendre QC troisieme proportionnelle à PQ & AP.

Si l'on cherche l'équation qui exprime la nature de la courbe BCD, on trouvera celle-ci,

$$u^6 - 3aa'u^4 + 3a^4uu - a^6 = a$$

$$+ 3xz + 21aa'zz + 3a^4zz$$

$$+ 3z^4 - 3aa'z^2$$

$$+ z^6$$

## COROLLAIRE I.

153. Si l'on veut chercher le rapport de la portion DC de la courbe BCD à sa tangente CP, l'on imaginera une autre tangente cp infiniment proche de CP; & ayant décrit du centre C le petit arc PQ, l'on aura cp - CP ou Op - Cc =  $\frac{2x dx}{a}$ , pour la différence de CP =  $\frac{aa - xx}{2}$  :

d'où l'on tire Cc = Op +  $\frac{2x dx}{a}$ . Or à cause des triangles rectangles semblables Q'PA, PpQ, l'on aura PQ(a) . AP(x) :: Pp(dx) . OP =  $\frac{x dx}{a}$ .

& partant  $Cc = \frac{3x dx}{a} = DC - Dc$ . Il est donc manifeste qu'en quelque endroit que l'on prenne le point C, l'on aura toujours  $DC - Dc \left( \frac{3x dx}{a} \right)$ .

$CP - cp \left( \frac{2x dx}{a} \right) :: 3 . 2$ . D'où il suit que la somme de toutes les différences  $DC - Dc$  qui répondent à la droite PD, c'est-à-dire, (Art. 96.) la portion DC de la courbe BCD, est à la somme de toutes les différences  $CP - cp$  qui répondent à la même droite PD, c'est-à-dire (Art. 96.) à la tangente CP :: 3 . 2. Et de même que la courbe entière BCD est à sa tangente BA :: 3 . 2.

## COROLLAIRE II.

154. **S**I l'on développe la courbe BCD en commençant par le point D, on formera la ligne courbe DNF telle que  $CN . CP :: 3 . 2$ . puisque CN est toujours égale à la portion DC de la courbe BCD. D'où il suit que les secteurs semblables  $CNn$ ,  $CPO$  sont entr'eux :: 9 . 4. & partant que l'espace DCN renfermé par les courbes DC, DN, & par la droite CN qui est tangente en C, & perpendiculaire en N, est à l'espace DCP renfermé par la courbe DC, & par les deux tangentes DP, CP, comme 9. à 4.

## COROLLAIRE III.

155. **L**E centre de pesanteur du secteur  $CNn$  doit être situé sur l'arc PO; puisque  $CP = \frac{2}{3} CN$ . Et comme cet arc est infiniment petit, il s'en-

suit que ce centre doit être sur la droite AD; & partant que le centre de pesanteur des espaces DCN, BDF qui sont composés de tous ces secteurs, doit être sur cette droite AD: de sorte que si l'on décrivoit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF, le centre de pesanteur de la figure entière seroit au point A.

## COROLLAIRE IV.

156. A cause des triangles rectangles semblables PQA, pPO, l'on aura PQ (a). AQ ou PM ( $\sqrt{aa - xx}$ ) :: Pp (dx).  $PO = \frac{dx\sqrt{aa - xx}}{a}$ . Et

à cause des secteurs semblables CPO, CNn, l'on aura aussi CP.CN, ou 2.3 :: PO( $\frac{dx\sqrt{aa - xx}}{a}$ ).

$Nn = \frac{3dx\sqrt{aa - xx}}{2a}$ . Or le rectangle MP × Pp, c'est-à-dire, (Art. 2.) le petit espace circulaire MPpm =  $dx\sqrt{aa - xx}$ . On aura donc AB × Nn =  $\frac{3}{2}$  MPpm: d'où il suit que la portion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB, est sesquialtère du segment circulaire DMP; & que la courbe entière DNF est égale aux trois quarts de BMD, quatrième partie de la circonférence du cercle.

## PROPOSITION IV.

## PROBLÈME.

157. SOIT donnée une courbe quelconque AM, (Fig. 126. Pl. 7.) qui ait pour axe la droite  
N 3

AP ; & soient entendues une infinité de perpendiculaires MC, mC à cette courbe. On demande la courbe qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou ce qui est la même chose, il faut trouver sur chaque perpendiculaire MC le point touchant C.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de MC, avec une appliquée MP, l'on menera par le point d'intersection C les droites CK perpendiculaire, & CE parallèle à l'axe : ayant ensuite nommé les données & variables AP,  $x$  ; PM,  $y$  ; les inconnues & constantes AK,  $u$  ; KC,  $z$  ; l'on aura  $PQ = \frac{ydy}{dx}$ , PK ou CE  $= u - x$ , ME  $= y + z$  ; & les triangles rectangles semblables MPQ, MEC donneront  $MP(y) \cdot PQ(\frac{ydy}{dx}) :: ME(y+z) \cdot EC(u-x) = \frac{ydy + zdy}{dx}$ , qui est une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que MC, & dont la différence ( en supposant  $dx$  constante ) donne  $dx = \frac{ydy + dy^2 + zddy}{dx}$  : d'où l'on tire ME  $(z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ . Or la nature de la courbe AM étant donnée, l'on aura des valeurs de  $dy^2$  &  $ddy$  en  $dx^2$ , lesquelles étant substituées dans  $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ , donneront pour ME une valeur entièrement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

Il est évident que la courbe qui passe par tous les points C, est la développée de la courbe AM; & comme l'on en a traité exprès dans la Section cinquième, il seroit inutile d'en donner ici des exemples nouveaux.

## PROPOSITION V.

## PROBLÈME.

158. **D**eux lignes quelconques AM, BN (Fig. 127. Pl. 7.) étant données avec une ligne droite MN qui demeure toujours la même; on suppose que les extrémités M, N de cette ligne glissent continuellement le long des deux autres; & l'on demande la courbe qu'elle touche toujours dans ce mouvement.

Ayant mené les tangentes MT, NT, & imaginé une autre droite *mn* infiniment proche de MN, & qui la coupe par conséquent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de déterminer les points. Il est clair que la droite MN, pour parvenir en *mn*, a parcouru par ses extrémités les petites portions M*m*, N*n* des lignes AM, BN, lesquelles sont communes à cause de leur infinie petitesse, aux tangentes TM, TN: de sorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la situation infiniment proche *mn*, ait glissé le long des droites TM, TN données de position.

Cela bien entendu, soient menées sur NT les perpendiculaires MP, CK; soient nommées les



données & variables TP,  $x$ ; PM,  $y$ ; les inconnues & constantes TK,  $u$ ; KC,  $z$ ; & la donnée MN qui demeure par-tout la même,  $a$ . Le triangle rectangle MPN donnera  $PN = \sqrt{aa - yy}$ ; & à cause des triangles semblables NPM, NKC, l'on aura  $NP (\sqrt{aa - yy}) : PM (y) :: NK (u - x - \sqrt{aa - yy}) : KC (z) = \frac{uy - xy}{\sqrt{aa - yy}} - y$ , dont la différence donne  $aady - aaxy - aaydx + y^3dx = aady - yydy\sqrt{aa - yy}$ : d'où en faisant  $\sqrt{aa - yy} = m$  pour abrégér, l'on tire  $PK (u - x) = \frac{m^3 dy + mmydx}{aady} = \frac{m^3 + mmx}{aa}$  en mettant pour  $ydx$  sa valeur  $xdy$ , à cause des triangles semblables  $mRM$ ,  $MPT$ ; & partant  $MC = \frac{mm + mx}{a}$ : ce qui donne cette construction.

Soit menée TE perpendiculaire sur MN, & soit prise  $MC = NE$ : je dis que le point C sera celui qu'on cherche. Car à cause des triangles rectangles semblables MNP, TNE, l'on aura  $MN (a) : NP (m) :: NT (m + x) : NE$  ou  $MC = \frac{mm + mx}{a}$ .

Autre manière. Ayant mené TE perpendiculaire sur MN, & décrit du centre C les petits arcs MS, NO, on nommera les données NE,  $r$ ; ET,  $s$ ; MN,  $a$ ; & l'inconnue CM,  $t$ . On aura  $Sm$  ou  $On = dt$ ; & les triangles rectangles semblables MET &  $mSM$ , NET &  $nON$ , CMS & CNO donneront  $ME (r - a) : ET$

$$(s) :: mS(dt). SM = \frac{sdt}{r-a}. \text{ Et NE}(r):$$

$$\text{ET}(s) :: nO(dt). ON = \frac{sdt}{r}. \text{ Et MS} - \text{NO}$$

$$\left(\frac{asdt}{rr-ar}\right). MS\left(\frac{sdt}{r-a}\right) :: MN(a). MC(t) = r.$$

Ce qui donne la même construction que ci-dessus.

Si l'on suppose que les lignes AM, BN soient des droites qui fassent entr'elles un angle droit ; il est visible que la courbe cherchée est la même que celle de l'art. 152.

## PROPOSITION VI.

### PROBLÈME.

159 **S**OIENT données trois lignes quelconques L, M, N ; (Fig. 128. Pl. 7.) & soient entendues de chacun des points L, l de la ligne L deux tangentes LM & LN, lm & ln, aux deux courbes M & N, une à chacune. On demande la quatrième courbe C, qui ait pour tangentes toutes les droites MN, mn qui joignent les points touchans des courbes M, N.

Ayant tiré la tangente LE, & mené par un de ses points quelconque E les perpendiculaires EF, EG sur les deux autres tangentes ML, NL, on concevra que le point l soit infiniment près du point L ; on tirera les petites droites LH, LK perpendiculaires sur ml, nl ; comme aussi les perpendiculaires MP, mP, NQ, nQ sur les tangentes ML, ml, NL, nl, lesquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points P &

Q. Tout cela formera les triangles rectangles semblables EFL , & LHL , EGL & LKL ; comme aussi les triangles LMH & MPm , LnK & NQn rectangles en H & m , K & N , qui seront semblables entr'eux , puisque les angles LMH , MPm étant joints l'un ou l'autre au même angle P M m , font un droit. On prouvera de même , que les angles LnK , NQn sont égaux entr'eux.

Cela posé , on nommera le petit côté Mm du polygone qui compose la courbe M , du ; & les données EF , m ; EG , n ; MN ou mn , a ; ML ou ml , b ; NL ou nl , c ; MP ou mP , f ; NQ ou nQ , g ( je prens ici les droites MP , NQ pour données , parce que la nature des courbes M , N étant donnée par la supposition , on les pourra toujours trouver ( Art. 78. ) ; & l'on aura , 1°.

$$MP(f) \cdot ML(b) :: Mm(du) \cdot LH = \frac{bdu}{f} \quad 2^\circ.$$

$$EF(m) \cdot EG(n) :: LH\left(\frac{bdu}{f}\right) \cdot LK = \frac{bndu}{mf}.$$

$$3^\circ. LN \text{ ou } Ln(c) \cdot nQ(g) :: LK\left(\frac{bndu}{mf}\right) \cdot nN$$

$$= \frac{bgndu}{cfm} \quad 4^\circ. (\text{menant } MR \text{ parallele à } NL \text{ ou } nl)$$

$$ml(b) \cdot ln(c) :: mM(du) \cdot MR = \frac{cd u}{b} \quad 5^\circ.$$

$$MR + Nn\left(\frac{cd u}{b} + \frac{bgndu}{cfm}\right) \cdot MR\left(\frac{cd u}{b}\right) :: MN$$

$$(a) \cdot MC = \frac{accfm}{ccfm + bbgn}. \text{ Ce qu'il falloit trouver.}$$

Si la tangente EL tomboit sur la tangente ML , il est clair que EF (m) deviendrait nulle ou zero ;

& partant que le point cherché C tomberoit sur le point M. De même si la tangente EL se confondoit avec la tangente LN, alors  $FG(n)$  deviendrait nulle, & l'on auroit par conséquent  $MC = a$  : d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit aussi sur le point N. Et enfin si la tangente EL tomboit dans l'ang<sup>e</sup> GLI; en ce cas  $EG(n)$  deviendrait négative : ce qui donneroit alors  $MC = \frac{acfm}{ccfm - bbg n}$ ; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N, mais de part ou d'autre.

## E X E M P L E I.

160. SUPPOSONS que les courbes M & N (Fig. 129. Pl. 7.) ne fassent qu'un cercle. Il est clair en ce cas que  $b = r$ , &  $f = g$ ; ce qui donne  $MC = \frac{am}{m + n}$ , d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raison donnée de  $m$  à  $n$  pour avoir le point cherché C; c'est-à-dire, en sorte que  $MC . NC :: m . n$ .

## E X E M P L E II.

161. SUPPOSONS que les courbes M & N soient une Section conique quelconque. La construction générale se peut changer en cette autre qui est beaucoup plus simple, si l'on fait attention à une propriété des Sections coniques, que l'on trouve démontrée dans les Livres qui en traitent : sçavoir que si l'on mene de chacun des points L, l d'une ligne droite EL deux tangentes LM

&  $LN$ ,  $lm$  &  $ln$  à une Section conique; toutes les droites  $MN$ ,  $mn$  qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point  $C$ , par lequel passe le diamètre  $AC$ , dont les ordonnées sont parallèles à la droite  $EL$ . Car il suit de là, que pour avoir le point  $C$ , il ne faut que mener un diamètre qui ait ses ordonnées parallèles à la tangente  $EL$ .

Il est évident que dans le cercle, le diamètre doit être perpendiculaire sur la tangente  $EL$ ; c'est-à-dire, qu'en menant de son centre  $A$  une perpendiculaire  $AB$  sur cette tangente, elle coupera la droite  $MN$  au point cherché  $C$ .

#### R E M A R Q U E.

162. **O**N peut par le moyen de ce Problème (*Fig. 128. Pl. 7.*) résoudre celui-ci qui dépend de la Méthode des Tangentes.

Les trois courbes  $C$ ,  $M$ ,  $N$ , étant données, on fera rouler une ligne droite  $MN$  autour de la courbe  $C$ , enforte qu'elle la touche continuellement; on tirera par les points  $M$ ,  $N$ , où elle coupe les courbes  $M$  &  $N$ , les tangentes  $ML$ ,  $NL$  qui s'entrecoupent en un point  $L$ , lequel décrit dans ce mouvement une quatrième courbe  $LL$ . Il s'agit de tirer la tangente  $LE$  de cette courbe, la position des droites  $MN$ ,  $ML$ ,  $NL$  étant donnée avec le point touchant  $C$ .

Car il est visible que ce Problème n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici  $MC$  est donnée: ce qu'on cherche, c'est la raison de  $EF$ ,  $EG$ , qui

détermine la position de la tangente  $EL$ . C'est pourquoi si l'on nomme la donnée  $MC$ ,  $h$ ; l'on

aura  $\frac{accfm}{ccfm + bbgn} = h$  : d'où l'on tire  $m = \frac{bbghn}{accf - ccfh}$ ;

& par conséquent la tangente  $LE$  doit être tellement située dans l'angle donné  $MLG$ , que si l'on mène d'un de ses points quelconque  $E$  les perpendiculaires  $EF$ ,  $EG$  sur les côtés de cet angle, elles soient toujours entr'elles en raison donnée de  $bbgh$  à  $accf - ccfh$ . Or cela se fait en menant  $MD$

parallèle à  $NL$ , & égale à  $\frac{b^3gh}{accf - ccfh}$ .

Il est évident ( *Art. 161.* ) que si les deux courbes  $M$  &  $N$  ( *Fig. 129. Pl. 7.* ) ne font qu'une Section conique, il ne faudra que tirer la tangente  $LE$  parallèle aux ordonnées du diamètre qui passe par le point  $C$ . ( *Consultez la Note 53<sup>e</sup>.* )



## SECTION IX.

*Solution de quelques Problèmes qui dépendent  
des Méthodes précédentes.*

## PROPOSITION I.

## PROBLÈME.

163. **S**OIT une ligne courbe AMD (Fig. 130. Pl. 7.) ( $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $AB = a$ ) telle que la valeur de l'appliquée  $y$  soit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorsque  $x = a$ , c'est-à-dire, lorsque le point  $P$  tombe sur le point donné  $B$ . On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée  $BD$ .

Soient entendues deux lignes courbes  $ANB$ ,  $COB$ , qui aient pour axe commun la ligne  $AB$ , & qui soient telles que l'appliquée  $PN$  exprime le numérateur, & l'appliquée  $PO$  le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les  $PM$ : de sorte que  $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$ . Il est clair que ces deux courbes se rencontreront au point  $B$ ; puisque par la supposition  $PN$  &  $PO$  deviennent chacune zero, lorsque le point  $P$  tombe en  $B$ . Cela posé, si l'on imagine une appliquée  $bd$  infiniment proche de  $BD$ , & qui rencontre les lignes courbes  $ANB$ ,  $COB$  aux points  $f$ ,  $g$ ; l'on aura  $bd$

$\frac{AB \times bf}{bg}$ , laquelle (*Art. 2.*) ne diffère pas de BD. Il n'est donc question que de trouver le rapport de  $bg$  à  $bf$ . Or il est visible que la coupée AP devenant AB, les appliquées PN, PO deviennent nulles, & que AP devenant Ab, elles deviennent  $bf$ ,  $bg$ . D'où il suit que ces appliquées, elles mêmes  $bf$ ,  $bg$ , sont la différence des appliquées en B &  $b$  par rapport aux courbes ANB, COB; & partant que si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait  $x = a = Ab$  ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée  $bd$  ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

## E X E M P L E. I.

164. S O I T  $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{axx}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ . Il est

clair que lorsque  $x = a$ , le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'est pourquoi l'on prendra la différence

rente  $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$  du numérateur, &

on la divisera par la différence  $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$  du déno-

minateur, après avoir fait  $x = a$ , c'est-à-dire, qu'on divisera  $-\frac{4}{3}adx$  par  $-\frac{3}{4}dx$ ; ce qui donne  $\frac{16}{9}a$  pour la valeur cherchée de BD.



## EXEMPLE II.

165. *SOIT*  $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$ . On trouve  $y = 2a$  ;  
 lorsque  $x = a$ .

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura  $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$ , qui étant divisé par  $x - a$ , se réduit à  $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$ ; & substituant  $a$  pour  $x$ , il vient comme auparavant  $y = 2a$ .

## LEMME.

166. *SOIT* une ligne courbe quelconque BCG, (Fig. 131. Pl. 7.) avec une ligne droite AE qui la touche au point B, & sur laquelle soient marqués à discrétion deux points fixes A, E. Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, en sorte qu'elle la touche continuellement; il est clair que les points fixes A, E décriront dans ce mouvement deux courbes AMD, ENH. Si l'on mene à présent DL parallèle à AB, & qui fasse par conséquent avec DK (sur laquelle je suppose la droite AE lorsqu'elle touche la courbe BCG en G) l'angle KDL égal à l'angle AOD fait par les tangentes en B, G; & que l'on décrive comme on voudra, du centre D l'arc KFL.

Je dis que  $DK \cdot KFL :: AE \cdot AMD \pm ENH$ .  
 sçavoir + lorsque le point touchant tombe toujours entre les points décrivans, & — lorsqu'il les laisse toujours du même côté.

Car

Car supposant que la droite  $AE$  en roulant autour de la courbe  $BCG$  soit parvenue dans les positions  $MCN$ ,  $mCn$  infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons  $DF$ ,  $Df$  parallèles à  $CM$ ,  $Cm$  : il est clair que les secteurs  $DFf$ ,  $CMm$ ,  $CNn$  seront semblables ; & qu'ainsi  $DF : Ff :: CM : Mm :: CN : Nn :: CM \pm CN$  ou  $AE : Mm \pm Nn$ . Or comme cela arrivera toujours en quelque endroit que se trouve le point touchant  $C$ , il s'ensuit que le rayon  $DK$  est à l'arc  $KFL$ , somme de tous les petits arcs  $Ff :: AE : AMD \pm ENH$ , somme de tous les petits arcs  $Mm \pm Nn$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

167. IL est visible que les courbes  $AMD$ ,  $ENH$  sont formées par le développement de la même courbe  $BCG$  ; & qu'ainsi la droite  $AE$  est toujours perpendiculaire sur ces deux courbes dans toutes les positions où elle se rencontre ; de sorte que leur distance est par-tout la même ; ce qui est la propriété des lignes parallèles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe  $AMD$  étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe  $ENH$  sans avoir besoin de la développée  $BCG$ , en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite  $AE$ .

## COROLLAIRE II.

168. **S**I la courbe BCG a ses deux moitiés BC, CG entièrement semblables & égales, & que l'on prenne les droites BA, GH égales entr'elles; il est clair que les courbes AMD, ENH seront semblables & égales, en sorte qu'elles ne différeront que par leur position. D'où il suit que la courbe AMD sera à l'arc de cercle KFL  $:: \frac{1}{2} AE. DK$ . c'est-à-dire, en raison donnée.

## PROPOSITION II.

## PROBLÈME.

169. **S**OIENT deux courbes quelconques AEV, BCG, (Fig. 132. Pl. 7.) avec une troisième AMD, telle qu'ayant décrit par le développement de la courbe BCG une portion de courbe EM, la relation des portions de courbes AE, EM, & des rayons de la développée EC, MG soit exprimée par une équation quelconque donnée. On propose de mener d'un point donné M sur la courbe AMD la tangente MT.

Ayant imaginé une autre portion de courbe *em* infiniment proche de EM, & les rayons de la développée CeF, GmR; Soit, 1°. CH perpendiculaire sur CE, & qui rencontre en H la tangente EH de la courbe AEV. 2°. ML parallèle à CE, & qui rencontre en L l'arc GL décrit du centre M & du rayon MG. 3°. GT perpendiculaire sur MG, & qui rencontre en T la tangente cherchée MT.

On nommera ensuite les données  $AE, x$  ;  $EM, y$  ;  $CE, u$  ;  $GM, z$  ;  $CH, s$  ;  $EH, t$  ; l'arc  $GL, r$  : d'où l'on aura  $Ee = dx$  ,  $Fe$  ou  $Rm = du = dz$  ; & les triangles rectangles semblables  $eFE$  ,  $ECH$  donneront  $CE (u)$  .  $CH (s) :: Fe (dz)$  .  $FE = \frac{sdz}{u}$  . Et  $CE (u)$  .  $EH$

$(t) :: Fe (dz)$  .  $Ee (dx) = \frac{tdz}{u}$  . Or par le Lemme

(*Art.* 166.)  $RF - me = \frac{rdz}{z}$  ; & partant  $RM$

$(\overline{RF - me} + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) = \frac{rdz}{z} +$

$dy + \frac{sdz}{u}$  . Donc à cause des triangles rectangles semblables  $mRM$  ,  $MGT$  , l'on aura  $mR (dz)$  .

$RM (\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy) :: MG (z)$  .  $GT = r$   $+ \frac{sz}{u} + \frac{zdy}{dz}$  . Mais si l'on met dans la différence

de l'équation donnée à la place de  $du$  &  $dx$  leurs valeurs  $dz$  &  $\frac{tdz}{u}$  , l'on trouvera une valeur

de  $dy$  en  $dz$  , laquelle étant substituée dans  $\frac{zdy}{dz}$  , il viendra pour la sous-tangente cherchée  $GT$

une valeur entièrement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

O 2

Si l'on suppose que la courbe BCG (*Fig. 133. Pl. 7.*) se réunisse en un point O ; il est visible que la portion de courbe ME ( $y$ ) se change en un arc de cercle égal à l'arc GL ( $r$ ), & que les rayons CE ( $u$ ), GM ( $z$ ) de la développée deviennent égaux entr'eux : de sorte que GT, qui devient en ce cas OT, se trouvera  $= y + s + \frac{zdy}{dz}$ .

## E X E M P L E.

170. Soit  $y = \frac{xz}{a}$  ; les différences donneront  $dy$  (*Fig. 133. Pl. 7.*)  $= \frac{zdx - xdz}{a}$  (on prend (*Art. 8.*)  $-xdz$  au lieu de  $+xdz$  ; parce que  $x$  &  $y$  croissant,  $z$  diminue)  $= \frac{zdx - xdz}{a}$ , en mettant pour  $dx$  sa valeur  $\frac{tdz}{z}$  ; & partant OT  $(y + s + \frac{zdy}{dz}) = y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a}$ , en mettant pour  $\frac{xz}{a}$  sa valeur  $y$ .

## R E M A R Q U E.

171. Si le point O tombe sur l'axe AB, (*Fig. 134. Pl. 7.*) & que la courbe AEV soit un demi-cercle ; la courbe AMD fera une demi-roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle BSN autour d'un arc égal BGN d'un cer-

cle décrit du centre O, & dont le point générateur A tombera dehors, dedans, ou sur la circonférence du demi-cercle mobile B S N, selon que la donnée  $a$  sera plus grande, moindre, ou égale à O V. Pour le prouver, & déterminer en même temps le point B.

Je suppose ce qui est en question, sçavoir que la courbe A M D est une demi-roulette, formée par la révolution du demi-cercle B S N, qui a pour centre le point K centre du demi-cercle A E V, autour de l'arc B G N décrit du centre O; & concevant que ce demi-cercle B S N s'arrête dans la situation B G N, telle que le point décrivant A tombe sur le point M, je mene par les centres des cercles générateurs la droite O K qui passe par conséquent par le point touchant G; & tirant K S E, j'observe que les triangles O K E, O K M sont égaux & semblables, puisque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun. D'où il suit 1°. Que les angles extrêmes M O K, E O K sont égaux; & qu'ainsi les angles M O E, G O B le sont aussi: ce qui donne G B. M E :: O B. O E. 2°. Que les angles M K O, E K O sont encore égaux; & qu'ainsi les arcs G N, B S, qui les mesurent, le sont aussi: la même chose se doit dire de leurs complémens G B, S N, à deux droits; puisqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or par la génération de la roulette, l'arc G B du cercle mobile est égal à l'arc G B de l'immobile. J'aurai donc S N. M E :: O B. O E. Cela posé,

Je nomme les données  $OV, b; KV$  ou  $KA, c$ ; & l'inconnue  $KB, u$ . J'ai  $OB = b + c - u$ ; & les secteurs semblables  $KEA, KSN$  me donnent  $KE (c). KS (u) :: AE (x). SN = \frac{ux}{c}$ . Et partant  $OB (b + c - u). OE (\tau) ::$

$$SN \left( \frac{ux}{c} \right). EM (\gamma) = \frac{ux\tau}{bc + cc - cu} = \frac{x\tau}{a}. \text{D'où}$$

$$\text{je tire } KB (u) = \frac{bc + cc}{a + c}. \text{ Il est donc évident}$$

que si l'on prend  $KB = \frac{bc + cc}{a + c}$ , & qu'on décrive des centres  $K$  &  $O$  le demi-cercle  $BSN$  & l'arc  $BGN$ ; la courbe  $AMD$  sera une demi-roulette d'écrite par la révolution du demi-cercle  $BSN$ , autour de l'arc  $BGN$ , & dont le point décrivant  $A$  tombe dehors, dedans, ou sur la circonférence de ce cercle, selon que  $KV (c)$  est plus grand, moindre, ou égal à  $KB \left( \frac{bc + cc}{a + c} \right)$ , c'est-à-dire, selon que  $a$  est plus grand, moindre, ou égal à  $OV (b)$ .

## COROLLAIRE. I.

172. IL est clair que  $EM (\gamma). AE (x) :: KB \times OE (u\tau). OB \times KV (bc + cc - cu)$ . Or si l'on suppose que  $OB$  devienne infinie; la droite  $OE$  le sera aussi, & deviendra parallèle à  $OB$ , puisqu'elle ne la rencontrera jamais; les arcs concentriques  $BGN, EM$  deviendront des droites parallèles entr'elles, & perpendiculaires sur  $OB, OE$ : & alors la droite  $EM$  sera

à l'arc  $AE :: KB . KV$ . parce que les droites infinies  $OE$ ,  $OB$  ne différant entr'elles que d'une grandeur finie, doivent être regardées comme égales.

## COROLLAIRE. II.

173. **D**E ce que les angles  $MKO$ ,  $EKO$  sont égaux, il suit que les triangles  $MKG$ ,  $EKB$  seront égaux & semblables; & qu'ainsi les droites  $MG$ ,  $EB$  sont égales entr'elles. D'où l'on voit (*Art. 43.*) que pour mener d'un point donné  $M$  sur la roulette, la perpendiculaire  $MG$ , il n'y a qu'à décrire du centre  $O$  l'arc  $ME$ , & du centre  $M$  de l'intervalle  $EB$  un arc de cercle qui coupera la base  $BGN$  en un point  $G$ , par où & par le point donné  $M$  l'on tirera la perpendiculaire requise.

## COROLLAIRE III.

174. **U**N point  $G$  étant donné sur la circonférence du demi-cercle mobile  $BGN$ ; si l'on veut trouver le point  $M$  de la roulette sur lequel tombe le point décrivant  $A$ , lorsque le point donné  $G$  touche la base, il ne faut que prendre l'arc  $SN$  égal à l'arc  $BG$ ; & ayant tiré le rayon  $KS$  qui rencontre en  $E$  la circonférence  $AEV$ , décrire du centre  $O$  l'arc  $EM$ . Car il est évident que cet arc coupera la roulette au point cherché  $M$ .





PROPOSITION III.

PROBLÈME.

175. **SOIT** une demi-roulette AMD (Fig. 135. 136. Pl. 7.) décrite par la révolution du demi-cercle BGN autour d'un arc égal BGN d'un autre cercle, en sorte que les parties révolues BG, BG soient toujours égales entr'elles; soit le point décrivant M pris sur le diamètre BN dehors, dedans, ou sur la circonférence mobile BGN. On demande le point M de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à son axe OA.

Supposant que le point M soit celui qu'on cherche, il est clair (Art. 47.) que la tangente en M doit être parallèle à l'axe OA; & qu'ainsi la perpendiculaire MC à la roulette, doit-être aussi perpendiculaire sur l'axe qu'elle rencontre au point P. Cela posé, si l'on mène OK par les centres des cercles générateurs, elle passera par le point touchant G; & si l'on tire KL perpendiculaire sur MG, on formera les angles égaux GKL, GOB; & partant l'arc IG qui est le double de la mesure de l'angle GKL, sera à l'arc GB mesure de l'angle GOB, comme le diamètre BN est au rayon OB. D'où il suit que pour déterminer sur le demi-cercle BGN le point G, où il touche l'arc qui lui sert de base lorsque le point décrivant M tombe sur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle BGN en un point G, en sorte qu'ayant tiré par le point donné M la corde IG, l'arc IG soit à l'arc BG en raison donnée de BN à

O B. La question se réduit donc à un Problème de la géométrie commune qui se peut toujours résoudre géométriquement, lorsque la raison donnée est de nombre à nombre ; mais avec le secours des lignes dont l'équation est plus ou moins élevée, selon que la raison est plus ou moins composée.

Si l'on suppose que le rayon O B devienne infini, comme il arrive lorsque la base B G N devient une ligne droite ; il s'ensuit que l'arc I G sera infiniment petit par rapport à l'arc G B. D'où l'on voit que la sécante M I G devient alors la tangente M T, lorsque le point décrivant M tombe au dehors du cercle mobile ; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur, lorsqu'il tombe au dedans.

Lorsque le point M tombe sur la circonférence en N, il ne faut que diviser la demi-circonférence B G N en raison donnée de B N à O B au point G. Car le point G ainsi trouvé, sera celui où le cercle mobile B G N touche la base, lorsque le point décrivant tombe sur le point cherché.

## L E M M E I I.

176. **E**N tout triangle B A C, (Fig. 137. Pl. 7.) dont les angles A B C, A C B, & C A D complément à deux droits de l'angle obtus B A C, sont infiniment petits ; je dis que ces angles ont même rapport entr'eux que les côtés A C, A B, B C, auxquels ils sont opposés.

Car si l'on circonscrit un cercle autour du

triangle  $BAC$ , les arcs  $AC$ ,  $AB$ ,  $BAC$ , qui mesurent les doubles de ces angles, seront infiniment petits, & ne différeront (*Art. 3.*) point par conséquent de leurs cordes ou soutendantes.

Si les côtés  $AC$ ,  $AB$ ,  $BC$  du triangle  $BAC$ , ne sont pas infiniment petits, mais qu'ils aient une grandeur finie : il s'ensuit que le cercle circonscrit doit être infiniment grand; puisque les arcs  $AC$ ,  $AB$ ,  $BAC$ , qui ont une grandeur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce cercle, étant les mesures d'angles infiniment petits.

#### PROPOSITION IV.

##### PROBLÈME.

177. **L**ES mêmes choses étant posées; il faut déterminer sur chaque perpendiculaire  $MG$ , (*Fig. 135. 136. Pl. 7.*) le point  $C$  où elle touche la développée de la roulette.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire  $mg$  infiniment proche de  $MG$ , & qui la coupe par conséquent au point cherché  $C$ , on tirera la droite  $Gm$ ; & ayant pris sur la circonférence du cercle mobile le petit arc  $Gg$  égal à l'arc  $Gg$  de l'immobile, on menera les droites  $Mg$ ,  $Ig$ ,  $Kg$ ,  $Og$ . Cela posé, si l'on regarde les petits arcs  $Gg$ ,  $Gg$  comme de petites droites perpendiculaires sur les rayons  $Kg$ ,  $Og$ , il est clair que le petit arc  $Gg$  du cercle mobile tombant sur l'arc  $Gg$  de l'immobile, le point décrivant  $M$  tombera sur  $m$ , en sorte que le triangle  $GMg$  se confondra

avec le triangle  $Gmg$ . D'où l'on voit que l'angle  $MGm$  est égal à l'angle  $gGg = GKg + GOg$ ; puisqu'ajoutant de part & d'autre les mêmes angles  $KGg$ ,  $OGg$ , l'on en compose deux droits.

Or nommant les données  $OG$ ,  $b$ ;  $KG$ ,  $a$ ;  $GM$  ou  $Gm$ ,  $m$ ;  $GI$  ou  $Ig$ ,  $n$ ; l'on trouve, *Premièrement*  $OG \cdot KG :: GKg \cdot GOg$ . Et  $OG (b) \cdot OG + GK$  ou  $OK (b + a) :: GKg \cdot GKg$

+  $GOg$  ou  $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$ . 2°. (*Ar.* 176.)  $Ig$ .

$MI :: GMg \cdot MGI$ . Et  $Ig \pm MI$  ou  $MG (m)$ .

$Ig (n) :: GMg \pm MGI$  ou  $GIg$  ou  $\frac{1}{2} GKg \cdot GMg$

ou  $Gmg = \frac{n}{2m} GKg$ . 3°. (*Ibid*) L'angle  $MCm$

ou  $MGm - Gmg (\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg) \cdot Gmg (\frac{n}{2m}$

$GKg) :: Gm (m) \cdot GC = \frac{bm n}{2am + 2bm - bn}$ . Et

par conséquent le rayon cherché  $MC$  de la dé-

veloppée sera  $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$ .

Si l'on suppose que le rayon  $OG(b)$  du cercle immobile devienne infini, sa circonférence deviendra une ligne droite; & en effaçant les termes  $2amm$ ,  $2am$ , parce qu'ils sont nuls par rapport aux autres  $2bmm$ ,  $2bm - bn$ , l'on aura

$$MC = \frac{2mm}{2m - n}.$$

## COROLLAIRE I.

178. **D**E ce que l'angle  $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$ , & de ce que les arcs de différens cercles sont

entr'eux en raison composée des rayons & des angles qu'ils mesurent; il suit que  $Gg . Mm :: KG \times GK_g . MG \times \frac{a+b}{b} GK_g$ . Et par conséquent aussi

que  $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$ ; ou ( ce qui est la même chose ) que  $KG \times Mm . MG \times Gg :: OK ( a + b ) . OG ( b )$ . qui est une raison constante. D'où l'on voit que la dimension de la portion AM de la demi-roulette AMD, dépend de la somme des  $MG \times Gg$  dans l'arc GB; & c'est ce que M. *Pascal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour bases des lignes droites.

M. *Varignon* est tombé dans cette même propriété par une voie très-différente de celle-ci.

#### COROLLAIRE II.

179. **LORSQUE** le point décrivant M. (*Fig. 135. Pl. 7.*) tombe hors de la circonférence du cercle mobile, il arrive nécessairement l'un des trois cas suivans. Car menant la tangente MT, le point touchant G tombera 1°. Sur l'arc TB, comme l'on a supposé dans la figure en faisant le calcul; & alors  $MC ( \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn} )$  surpassera toujours  $MG ( m )$ . 2°. Sur le point touchant T; & l'on aura pour lors  $MC ( \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn} ) = m$ , puisque  $IG ( n )$  s'évanouit. 3°. Sur l'arc TN, & alors la valeur de  $GI ( n )$  devenant négative de positive qu'elle étoit, l'on aura  $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$ : de sorte que MC sera moindre

que  $MG(m)$ , & toujours positif. D'où il est évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon  $MC$  de la développée est toujours positive.

## COROLLAIRE III.

180. LORSQUE le point décrivant  $M$  (Fig. 136. Pl. 7.) tombe au dedans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours  $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$ ;

& il peut arriver que  $bn$  surpasse  $2am + 2bm$ , & qu'ainsi la valeur du rayon  $MC$  de la développée soit négative : d'où l'on voit que lorsqu'elle cesse d'être positive pour devenir négative, comme il arrive (Art. 81.) lorsque le point  $M$  devient un point d'inflexion, il faut nécessairement alors que  $bn = 2am + 2bm$ ; & partant que  $MI \times MG(mn - mm) = \frac{2amm + bmm}{b}$ .

Or si l'on nomme la donnée  $KM$ ,  $c$ ; l'on aura par la propriété du cercle  $MI \times MG(\frac{2amm + bmm}{b})$

$= BM \times MN(aa - cc)$ , ce qui donne l'inconnue  $MG(m) = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ . Donc si l'on décrit du point

donné  $M$  comme centre, & de l'intervalle  $MG = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ , un cercle ; il coupera le cercle

mobile en un point  $G$ , où il touchera le cercle immobile qui lui sert de base, lorsque le point décrivant  $M$  tombera sur le point d'inflexion  $F$ .

Si l'on mene  $MR$  perpendiculaire sur  $BN$ ; il est clair que cette  $MG(\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}})$  fera moindre

que  $MR (\sqrt{aa - cc})$ , & qu'elle lui doit être égale lorsque  $b$  devient infinie, c'est-à-dire, lorsque la base de la roulette devient une ligne droite.

Il est à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon  $MG$  coupe le cercle mobile, il faut que  $MG$  surpasse  $MN$ , c'est-à-dire, que  $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$  surpasse  $a - c$ ; & qu'ainsi  $KM (c)$  sur-

passe  $\frac{aa}{a + b}$ . D'où il est manifeste qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette  $AMD$ , il faut que  $KM$  soit moindre que  $KN$ , & plus grande que  $\frac{aa}{a + b}$ .

### LEMME. III.

181. *SOIENT deux triangles  $ABb$ ,  $CDd$  (Fig. 138. Pl. 8.) qui aient chacun un de leurs côtés  $Bb$ ,  $Dd$  infiniment petit par rapport aux autres : je dis que le triangle  $ABb$  est au triangle  $CDd$  en raison composée de l'angle  $BAb$  à l'angle  $DCd$ , & du quarré du côté  $AB$  ou  $Ab$  au quarré du côté  $CD$  ou  $Cd$ .*

Car si l'on décrit des centres  $A$ ,  $C$ , & des intervalles  $AB$ ,  $CD$ , les arcs de cercle  $BE$ ,  $DF$ ; il est clair (*Art. 2.*) que les triangles  $ABb$ ,  $CDd$  ne différeront point des secteurs de cercles  $ABE$ ,  $CDF$ . Donc, &c.

Si les côtés  $AB$ ,  $CD$  sont égaux, les triangles  $ABb$ ,  $CDd$  seront entr'eux comme leurs angles  $BAb$ ,  $DCd$ .



## PROPOSITION V.

## PROBLÈME.

182. **L**ES mêmes choses étant toujours posées ; on demande la quadrature de l'espace  $MGBA$ , (Fig. 135. Pl. 7.) renfermé par les perpendiculaires  $MG$ ,  $BA$  à la roulette, par l'arc  $GB$ , & par la portion  $AM$  de la demi-roulette  $AMD$ , en supposant la quadrature du cercle.

L'angle  $GMg$  ( $\frac{n}{2m} GKg$ ) est à l'angle  $MGm$  ( $\frac{a+b}{b} GKg$ ), comme (Art. 181.) le petit trian-

gle  $MGg$  qui a pour base l'arc  $Gg$  du cercle mobile, au petit triangle ou secteur  $GMm$ ; & partant le secteur  $GMm = \frac{2m}{n} MGg \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b}$

$\times MGg + \frac{2ap + 2bp}{bn} \times MGg$  en nommant  $MI$ ,  $p$ ,

& mettant pour  $m$  sa valeur  $p+n$ . Or (Art. 181.) le petit triangle ou secteur  $KGg$  est au petit triangle  $MGg$  en raison composée du quarré de  $KG$  au quarré de  $MG$ , & de l'angle  $GKg$  à l'angle  $GMg$ ; c'est-à-dire ::  $aa \times GKg$ .  $mmx$

$\frac{n}{2m} GKg$ . & partant le petit triangle  $MGg$

$= \frac{mn}{2aa} KGg$ . Mettant donc cette valeur à la

place du triangle  $MGg$  dans  $\frac{2ap + 2bp}{bn} MGg$ , l'on

aura le secteur  $GMm = \frac{2a + 2b}{b} MGg +$



$\frac{a+b \times pm}{aab}$  KGg. Mais à cause du cercle, GM ×

Ml (pm) = BM × MN (cc — aa) qui est une quantité constante, & qui demeure toujours la même en quelqu'endroit que se trouve le point décrivant M; & par conséquent GMm + MGg ou mGg, c'est-à-dire, le petit espace de la rou-

lette  $GMmg = \frac{2a+3b}{b} MGg + \frac{a+b \times cc - aa}{aab}$

KGg. Donc puisque GMmg est la différence de l'espace de la roulette MGBA, & MGg, celle de l'espace circulaire MGB, renfermé par les droites MG, MB, & par l'arc GB, & que de plus le petit secteur KGg est la différence du secteur KGB; il s'ensuit (Art. 96.) que l'espace de la roulette

$MGBA = \frac{2a+3b}{b} MGB + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGB.$

Ce qu'il falloit trouver.

Lorsque le point décrivant M (Fig. 139. Pl. 8.) tombe hors la circonférence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G tombe sur l'arc NT; il est visible (Art. 180.) que les perpendiculaires MG, mg s'entrecoupent en un point C, & qu'on a pour lors  $m = p - n$ . D'où il suit que le petit secteur GMm = —  $\frac{2a-2b}{b} MGg$

+  $\frac{2ap+2bp}{bn} MGg = — \frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{amp+bmp}{aab} KGg$ , en mettant comme auparavant

pour le petit triangle MGg la valeur  $\frac{mn}{2aa} KGg$ ;

&c

& partant que  $GMm - MGg$  ou  $mGg$ , c'est-à-dire  $MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b} MGg +$

$\frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGg$ , en mettant pour  $pm$  la va-

leur  $cc - aa$ . Or supposant que  $TH$  soit la position de la tangente  $TM$  du cercle mobile, lorsque son point  $T$  touche la base au point  $T$ ; il est clair que  $MCm - GCg = MGTH - mgTH$ , c'est-à-dire, la différence de l'espace  $MGTH$ , & que  $MGg$  est celle de  $MGT$ , de même que  $KGg$  celle de  $KGT$ . Donc (*Art. 96.*) l'espace  $MGTH$

$= -\frac{2a-3b}{b} MGT + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGT$ .

Mais, comme l'on vient de prouver, l'espace  $HTBA = \frac{2a+3b}{b} MTB + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KTB$ .

Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'espace  $MGBA$  ( $MGTH + HTBA$ )  $= \frac{2a+3b}{b}$

$\frac{MTB - MGT}{b}$  ou  $MGB + \frac{a+b \times cc - aa}{aab} KGT$  +  $KTB$  ou  $KGB$ .

Donc l'espace entier  $DNBA$  (*Fig. 135. Pl. 7.*) renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette  $DN$ ,  $BA$ , par l'arc de cercle  $BGN$ , & par la demi-roulette  $AMD$ , est

$= \frac{2a+3b}{b} + \frac{a+b \times cc - aa}{aab}$

$\times KNGB$ ; puisque le secteur  $KGB$  & l'espace circulaire  $MGB$  deviennent chacun le demi-cercle  $KNGB$ , lorsque le point touchant  $G$  tombe au point  $N$ ,

Lorsque le point décrivant  $M$  (Fig. 136. Pl. 7.) tombe au dedans du cercle mobile, il faut mettre  $aa - cc$  à la place de  $cc - aa$  dans les formules précédentes ; parce qu'alors  $BM \times MN = aa - cc$ .

Si l'on fait  $c = a$ , l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant sur la circonférence du cercle mobile ; & si l'on suppose  $b$  infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour bases les lignes droites.

## AUTRE SOLUTION.

183. ON décrit du rayon  $OD$  (Fig. 140. Pl. 7.) l'arc  $DV$ , & des diamètres  $AV$ ,  $BN$  les demi-cercles  $AEV$ ,  $BSN$  ; & ayant décrit à discrétion du centre  $O$  l'arc  $EM$  renfermé entre le demi-cercle  $AEV$  & la demi-roulette  $AMD$ , l'on mene l'appliquée  $EP$ . Il s'agit de trouver la quadrature de l'espace  $AEM$  compris entre les arcs  $AE$ ,  $EM$ , & la portion  $AM$  de la demi-roulette  $AMD$ .

Pour cela, soit un autre arc  $em$  concentrique & infiniment proche de  $EM$ , une autre appliquée  $ep$ , une autre  $Oe$  qui rencontre l'arc  $ME$  prolongé (s'il est nécessaire) au point  $F$ . Soient nommées les variables  $OE$ ,  $z$  ;  $VP$ ,  $u$  ; l'arc  $AE$ ,  $x$  ; & comme auparavant les constantes  $OB$ ,  $b$  ;  $KB$  ou  $KN$ ,  $a$  ;  $KV$  ou  $KA$ ,  $c$  : l'on aura  $Fe = dz$ ,  $Pp = du$ ,  $OP = a + b - c + u$ ,  $PE = 2cu - uu$ , l'arc  $EM$  (Art. 172.)  $= \frac{axz}{bc}$  ; &

partant le rectangle fait de l'arc EM par la petite droite Fe, c'est-à-dire (*Art. 2.*) le petit espace

$$EM\ me = \frac{axzdz}{bc}. \text{ Or à cause du triangle réctan-}$$

gle OPE;  $zx = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$ , dont la différence donne  $zdz = adu + bdu$ . Mettant donc cette valeur à la

place de  $zdz$  dans  $\frac{axzdz}{bc}$ , l'on aura le petit espace

$$EM\ me = \frac{aaxdu + abxdu}{bc}.$$

Maintenant si l'on décrit la demi-toulette

AHT par la révolution du demi-cercle AEV sur la droite VT perpendiculaire à VA, & qu'on prolonge les appliquées PE, *pe* jusqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points H, *h*: il est clair (*Art. 172.*) que  $EH \times Pp$ , c'est à-dire, le petit espace

$$EHhe = xdu; \text{ \& qu'ainsi } EMme \left( \frac{aaxdu + abxdu}{bc} \right).$$

$EHhe (xdu) : : aa + ab . bc$ . qui est une raison constante. Or puisque cela arrive toujours en quel-qu'endroit que se trouve l'arc EM, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces EMme, c'est-à-dire l'espace AEM, est à la somme de tous les petits espaces EHhe, c'est-à dire, à l'espace AEH : :  $aa + ab . bc$ . Mais l'on a (*Art. 99.*) la quadrature de l'espace AEH dépendamment de celle du cercle; & partant aussi celle de l'espace cherché AEM.

Ceci se peut aussi démontrer sans aucun calcul, comme j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Août de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'espace AEH sans avoir recours à l'art. 99. Car si l'on acheve les rectangles PQ,  $pq$ , l'on aura  $Qq$  ou  $HR$ .  $Pp$  ou  $Rh :: EP$ .  $PA$  ou  $HQ$ . puisque (Art. 18.) la tangente en H est parallèle à la corde AE; & partant  $HQ \times Qq = EP \times Pp$ , c'est-à-dire, que les petits espaces  $HQq$ ,  $EPp$  sont toujours égaux entr'eux. D'où il suit que l'espace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH, & par la portion AH de la demi-roulette AHT, est égal à l'espace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE, & par l'arc AE. L'espace AEH sera donc égal au rectangle PQ moins le double de l'espace circulaire APE; c'est-à dire, au rectangle fait de PE par KA plus ou moins le rectangle fait de KP par l'arc AE, selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du centre. Et par conséquent l'espace cherché AEM

$$= \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA \pm KP \times AE.$$

## COROLLAIRE I.

184. LORSQUE le point P tombe en K, le rectangle  $KP \times AE$  s'évanouit, & le rectangle  $PE \times KA$  devient égal au quarré de KA : d'où l'on voit que l'espace AEM est alors  $= \frac{aac + abc}{b}$ ; & par conséquent il est quarrable absolument & indépendamment de la quadrature du cercle.

## COROLLAIRE. II.

185. SI l'on ajoute à l'espace A E M le secteur A K E , l'espace A K E M renfermé par les rayons A K , K E , par l'arc E M , & par la portion A M de la demi-roulette A M D , se trouve ( lorsque le point P tombe au dessus du centre K )

$$= \frac{b c c + 2 a a c + 2 a b c - 2 a a u - 2 a b u}{2 b c} A E + \frac{a a + a b}{b c}$$

P E × K A ; & partant si l'on prend V P ( u )

$$\frac{2 a a c + 2 a b c + b c c}{2 a a + 2 a b} \text{ ( ce qui rend nulle la valeur de$$

$$\frac{b c c + 2 a a c + 2 a b c - 2 a a u - 2 a b u}{2 b c} A E ), \text{ l'on aura}$$

$$\text{l'espace A K E M} = \frac{a a + a b}{b c} P E \times K A. \text{ D'où}$$

l'on voit que sa quadrature est encore indépendante de celle du cercle.

Il est visible qu'entre tous les espaces A E M & A K E M , il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature soit absolue.

## A V E R T I S S E M E N T.

*Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures se doit aussi entendre des intérieures, c'est-à-dire, de celles dont le cercle immobile roule au dedans de l'immobile; en observant que les rayons K B ( a ) , K V ( c ) deviennent négatifs de positifs qu'ils étoient. C'est pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes, les signes des termes où a & c se rencontrent avec une dimension impaire.*

## REMARQUE.

186. IL y a certaines courbes qui paroissent avoir un point d'inflexion , & qui cependant n'en ont point ; ce que je crois à propos d'expliquer par un exemple , car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géométrique  $NDN$  (Fig. 141. Pl. 7.), dont la nature est exprimée par l'équation  $z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$  ( $AP = x$ ,  $PN = z$ ), dans laquelle il est clair 1°. Que  $x$  étant égale à  $a$ ;  $PN$  ( $z$ ) s'évanouit. 2°. Que  $x$  surpassant  $a$ , la valeur de  $z$  est positive ; & qu'au contraire lorsqu'il est moindre , elle est négative. 3°. Que lorsque  $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ , la valeur de  $PN$  est infinie. D'où l'on voit que la courbe  $NDN$  passe de part & d'autre de son axe en le coupant en un point  $D$  tel que  $AD = a$ ; & qu'elle a pour asymptote la perpendiculaire  $BG$  menée par le point  $B$  tel que  $AB = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ .

Si l'on décrit à présent une autre courbe  $EDF$ , enforte qu'ayant mené à discrétion la perpendiculaire  $MPN$ , le rectangle fait de l'appliquée  $PM$  par la constante  $AD$ , soit toujours égal à l'espace correspondant  $DPN$ ; il est visible qu'en nommant  $PM$ ,  $y$ ; & prenant les différences, l'on aura  $AD \times Rm(ady) = NPpn$  ou  $NP \times Pp(\frac{xxdx - aadx}{\sqrt{2xx - aa}})$ ; & partant  $Rm(dy) \cdot Pp$  ou  $RM(dx) :: PN, AD$ . D'où il suit que la courbe  $EDF$  touche l'a-

symptote BG prolongée de l'autre côté de B en un point E, & l'axe AP au point D; & qu'ainsi elle doit avoir un point d'inflexion en D. Cepen-

dant on trouve (*Art.* 78.)  $-\frac{x^3}{2aa}$  pour la valeur du rayon de sa développée, laquelle est toujours négative, & devient égale à  $-\frac{1}{2}a$  lorsque le point M tombe en D: d'où l'on doit conclure (*Art.* 81.) que la courbe qui passe par tous les points M est toujours convexe vers l'axe AP, & qu'elle n'a pas de point d'inflexion en D. Comment donc accorder tout cela? En voici le dénouement.

Si l'on prend PM du même côté que PN, on formera une autre courbe GDH qui sera toute pareille à EDF, & qui en doit faire partie; puisque la génération est la même. Cela étant ainsi, l'on doit penser que les parties qui composent la courbe entière ne sont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui se touchent au point D; car tout s'accorde parfaitement dans cette dernière supposition. Ceci se confirme encore par cet exemple.

Soit la courbe DMG (*Fig.* 142. *Pl.* 7.), qui ait pour équation  $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$  (AP =  $x$ , PM =  $y$ ). Il suit de cette équation que la courbe entière a deux parties EDH, GDF opposées l'une à l'autre comme l'hyperbole ordinaire, en sorte que leur distance DD ou  $2AD =$

$$\sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$$



Si l'on suppose que  $b$  s'évanouisse , la distance  $DD$  (*Fig. 143. Pl. 7.*) s'évanouira aussi ; & partant les deux parties  $EDH$ ,  $GDF$  se toucheront au point  $D$  : de sorte qu'on pourroit penser à présent que cette courbe a un point d'inflexion ou de rebroussement en  $D$  , selon qu'on imagineroit que ses parties seroient  $EDF$ ,  $GDH$  ou  $EDG$ ,  $HDF$ . Mais l'on se détromperoit aisément , en cherchant le rayon de la développée ; car l'on trouveroit qu'il seroit toujours positif , & qu'il deviendrait égal à  $\frac{1}{2}a$  dans le point  $D$ .

On peut remarquer en passant , (*Fig. 141. Pl. 7.*) que la quadrature de l'espace  $DPN$  dépend de celle de l'hyperbole : ou ( ce qui revient au même ) de la rectification de la parabole ; & que la portion de courbe  $DMF$  satisfait au Problème proposé par M. Bernoulli dans le Tome second des Supplémens des Actes de Leipzig , page 291. (*Consultez la Note 54<sup>e</sup>.*)



## SECTION X.

*Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de M<sup>re</sup> Descartes & Hudde.*

## D É F I N I T I O N.

**S**OIT une ligne courbe **A D B** ( *Fig. 144. 145. 146. Pl. 8.* ) telle que les parallèles **K M N** à son diamètre **A B** la rencontrent en deux points **M**, **N**; & soit entendue la partie interceptée **M N** ou **P Q** devenir infiniment petite. Elle sera nommée alors la *Différence* de la coupée **A P**, ou **K M**.

## C O R O L L A I R E I.

187. **L**ORSQUE la partie **M N** ou **P Q** devient infiniment petite; il est clair que les coupées **A P**, **A Q** deviennent égales chacune à **A E**, & que les points **M**, **N** se réunissent en un point **D**: enforte que l'appliquée **E D** est la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables **P M**, **N Q**.

## C O R O L L A I R E II.

188. **I**L est clair qu'entre toutes les coupées **A P**, il n'y a que **A E** qui ait une différence; parce qu'il n'y a qu'en ce cas où **P Q** devienne infiniment petite.

## COROLLAIRE III.

189. **SI** l'on nomme les indéterminées AP ou KM,  $x$  ; PM ou AK,  $y$  ; il est évident que AK ( $y$ ) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de  $x$ , savoir KM, KN ou AP, AQ. C'est pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe ADB soit délivrée d'incommensurables, afin que la même inconnue  $x$  qui en marque les racines (car on regarde  $y$  comme connue) puisse avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut observer dans la suite.

## PROPOSITION I.

## PROBLÈME.

190. **LA** nature de la courbe géométrique ADB étant donnée ; déterminer la plus grande ou la moindre de ses appliquées ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant  $y$  comme constante, &  $x$  comme variable ; il est clair (Art. 188.) qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ses racines  $x$ , une valeur AE, telle que l'appliquée ED sera la plus grande ou la moindre de toutes les semblables.

Soit, par exemple,  $x^3 + y^3 = axy$ , dont la différence, en traitant  $x$  comme variable, &  $y$  comme constante, donne  $3xxdx = aydx$  ; & par-

tant  $y = \frac{3xx}{a}$ . Si l'on substitue cette valeur à la place de  $y$  dans l'équation à la courbe  $x^3 + y^3 = axy$  ; l'on aura pour  $x$  une valeur  $AE = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ , telle que l'appliquée  $ED$  sera la plus grande de toutes les semblables, de même qu'on l'a déjà trouvé art. 48.

Il est évident que l'on détermine de même non-seulement les points  $D$ , lorsque les appliquées  $ED$  sont perpendiculaires ou tangentes de la courbe  $ADB$  ; mais aussi lorsqu'elles sont obliques sur la courbe, c'est-à-dire, lorsque les points  $D$  sont des points de rebroussement de la première ou seconde sorte. D'où l'on voit que cette nouvelle manière de considérer les différences dans les courbes géométriques est plus simple & moins embarrassante en quelques rencontres, que la (*Secl. 3.*) première.

## REMARQUE.

191. **O**N peut remarquer dans les courbes rebroussantes, que les  $PM$  (*Fig. 146. Pl. 8.*) parallèles à  $AK$  ; les rencontrent en deux points  $M$ ,  $O$ , de même que les  $KM$  parallèles  $AP$ , font en  $M$ ,  $N$  : de sorte que  $AP$  ( $x$ ) demeurant la même,  $y$  a deux différentes valeurs  $PM$ ,  $PO$ . C'est pourquoi l'on peut traiter  $x$  comme constante, &  $y$  comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que si l'on traite  $x$  &  $y$  comme variables, en prenant cette diffé-

rence, il faudra que tous les termes qui multiplient  $dx$  d'une part, & tous ceux qui multiplient  $dy$  d'une autre part, soient égaux à zero. Mais il faut bien prendre garde que  $dx$  &  $dy$  marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

## C O R O L L A I R E.

192. **S**I après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue  $x$  de variable, l'on en prend la différence; il est clair 1°. Qu'on ne fait autre chose que de multiplier chaque terme par l'exposant de la puissance de  $x$ , & par la différence  $dx$ , & le diviser ensuite par  $x$ . 2°. Que cette division par  $x$ , aussi-bien que la multiplication par  $dx$ , peut être négligée, parce qu'elle est la même dans tous les termes. 3°. Que les exposans des puissances de  $x$  font une progression arithmétique, dont le premier terme est l'exposant de la plus grande puissance, & le dernier est zero, car on suppose qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit, par exemple,  $x^3 * - ayx + y^3 = 0$ . Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0; l'on formera l'équation nouvelle  $3x^3 - ayx = a$ .

$$x^3 * - ayx + y^3 = 0.$$

$$3, 2, 1, 0.$$

---


$$3x^3 * - ayx * = 0.$$

D'où l'on tire  $y = \frac{3x^2}{a}$ , de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la manière accoutumée.

Cela supposé, je dis qu'au lieu de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, l'on peut se servir de telle autre progression arithmétique qu'on voudra :  $m+3, m+2, m+1, m+0$ , ou  $m$  (l'on désigne par  $m$  un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif). Car multipliant  $x^3 * - ayx + y^3 = 0$  par  $x^m$ , l'on aura  $x^{m+3}*, &c. = 0$ , dont les termes doivent être être multipliés par ceux de la progression  $m+3, m+2, m+1, m$ . chacun par son correspondant pour en avoir la différence.

$$x^{m+3} * - ayx^{m+1} + y^3 x^m = 0.$$

$$m+3, m+2, m+1, m.$$

---


$$m+3x^{m+3} * - m+1 ayx^{m+1} + my^3 x^m = 0.$$

Ce qui donnera  $m+3x^{m+3} - m+1 ayx^{m+1} + my^3 x^m = 0$ ; & en divisant par  $x^m$ , il viendra  $m+3x^3 - m+1 ayx + my^3 = 0$ , comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant simplement l'égalité proposée par la progression  $m+3, m+2, m+1, m$ .

Si  $m = -3$ , la progression sera 0, -1, -2, -3; & l'équation sera  $2ayx - 3y^3 = 0$ . Si  $m = -1$ , la progression sera 2, 1, 0, -1; & l'équation  $2x^3 - y^3 = 0$ .

On peut changer de signes tous les termes de la progression, c'est-à-dire, qu'au lieu de  $0, -1, -2, -3$ , &  $2, 1, 0, -1$ , l'on peut prendre  $0, 1, 2, 3$ , &  $-2, -1, 0, 1$ ; parce qu'on ne fait par là que changer de signes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être égale à zéro. Et en effet, au lieu de  $2ayx - 3y^3 = 0$ ,  $2x^3 - y^3 = 0$ , l'on auroit  $-2ayx + 3y^3 = 0$ ,  $-2x^3 + y^3 = 0$ ; ce qui est la même chose.

Or il est visible que ce que l'on vient de démontrer à l'égard de cet exemple, s'appliquera de même manière à tous les autres. D'où il suit que si après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines égales entr'elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progression arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui renfermera entre ses racines une des deux égales de la première. Par la même raison, si cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progression arithmétique, l'on en formera une troisième qui aura entre ses racines une des deux égales de la seconde; & ainsi de suite. De sorte que si l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progressions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ses racines une des trois égales de la première; & de même si l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progressions arithmétiques; si cinq, par le produit de quatre, &c.

C'est là précisément en quoi consiste la Méthode de M. Hudde.

## PROPOSITION II.

## PROBLÈME.

193. **D'**UN point donné T (Fig. 147. Pl. 8.) sur le diamètre AB, ou du point donné H sur AH parallèle aux appliquées; mener la tangente THM.

Ayant mené par le point touchant M l'appliquée MP, & nommé AT,  $s$ ; AH,  $t$ ; dont l'une ou l'autre est donnée; & les inconnues AP,  $x$ ; PM,  $y$ : les triangles semblables TAH, TPM donneront  $y = \frac{st + tx}{s}$ ,  $x = \frac{sy - st}{t}$ ; & mettant

ces valeurs à la place de  $y$  ou de  $x$  dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe AMD, l'on en formera une nouvelle dans laquelle  $y$  ou  $x$  ne se rencontrera plus.

Si l'on mène à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AH en G, & la courbe AMD en deux points N, D, desquels l'on abaisse les appliquées NQ, DB; il est évident que  $t$  exprimant AG dans l'équation précédente,  $x$  ou  $y$  aura deux valeurs AQ, AB, ou NQ, DB, lesquelles deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM lorsque  $t$  exprime AH, c'est-à-dire, lorsque la sécante TDN devient la tangente TM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par une progression arithmétique



arbitraire ; ce que l'on réitérera , s'il est nécessaire , en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progression arithmétique quelconque , afin que par la comparaison des équations qui en résultent , l'on en puisse trouver une qui ne renferme que l'inconnue  $x$  ou  $y$  , avec la donnée  $s$  ou  $t$ . L'exemple qui suit éclaircira suffisamment cette Méthode.

## E X E M P L E.

194. **S** OIT  $ax = yy$  l'équation qui exprime la nature de la courbe A M D. Si l'on met à la place de  $x$  la valeur  $\frac{sy - st}{t}$  , l'on aura  $tyy$  , &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$tyy - asy + ast = 0.$$

$$\begin{array}{r} 1, \quad 0, -1. \\ \hline tyy \quad * \quad -ast = 0. \end{array}$$

C'est pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progression arithmétique  $1, 0, -1$ , l'on trouvera  $as = yy = ax$  ; & partant  $AP(x) = s$ . D'où l'on voit qu'en prenant  $AP = AT$  ; & menant l'appliquée PM, la ligne TM sera tangente en M. Mais si au lieu de AT ( $s$ ), c'est AH ( $t$ ) qui est donnée, l'on multipliera la même équation  $tyy$  , &c. par cette autre progression  $0, 1, 2$  , & l'on aura la cherchée PM ( $y$ ) =  $2t$ .

On auroit trouvé la même construction en mettant pour  $y$  la valeur  $\frac{st + tx}{s}$  dans  $ax = yy$ . Car il vient  $txx$  , &c. dont les termes multipliés par

1, 0,

1, 0, — 1, donnent  $xx = ss$ ; & par conséquent  $AP(x) = s$ .

## COROLLAIRE.

195. SI l'on veut à présent que le point touchant M soit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H, dans lequel la tangente MT rencontre le diamètre AB ou la parallèle AH aux appliquées; il n'y a qu'à regarder dans la dernière équation, qui exprime la valeur de l'inconnue  $x$  ou  $y$  par rapport à la donnée  $s$  ou  $t$ , cette dernière comme l'inconnue, &  $x$  ou  $y$  comme connue.

## PROPOSITION III.

## PROBLÈME.

196. LA nature de la courbe géométrique AFD (Fig. 148. Pl. 8.) étant donnée; déterminer son point d'inflexion F.

Ayant mené par le point cherché F, l'appliquée FE avec la tangente FL, par le point A (origine des  $x$ ) la parallèle AK aux appliquées, & nommé les inconnues LA,  $s$ ; AK,  $t$ ; AE,  $x$ ; EF,  $y$ : les triangles semblables LAK, LEF donneront encore  $y = \frac{st + tx}{s}$ , &  $x = \frac{sy - st}{t}$ ; de sorte que mettant ces valeurs à la place de  $y$  ou  $x$  dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle  $y$  ou  $x$  ne se rencontrera plus, de même que dans la proposition précédente.

Q

Si l'on mène à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AK en H, qui touche la courbe AFD en M, & la coupe en D, d'où l'on abaisse les appliquées MP, DB : il est évident 1°. Que  $s$  exprimant AT ; &  $t$ , AH ; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines égales, sçavoir (Art. 193.) chacune à AP ou à PM selon qu'on a fait évanouir  $y$  ou  $x$ , & une autre AB, ou BD. 2°. Que  $s$  exprimant AL ; &  $t$ , AK ; le point touchant M se réunit avec le point d'intersection D dans le point cherché F : puisque (Art. 67.) la tangente LF doit toucher & couper la courbe dans le point d'inflexion F ; & qu'ainsi les valeurs AP, AB de  $x$ , ou PM, BD de  $y$  deviennent égales entr'elles, sçavoir, l'une & l'autre à la cherchée AE ou EF. D'où il suit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par le produit de deux progressions arithmétiques arbitraires ; ce que l'on réitérera, s'il est nécessaire, en la multipliant de même par un autre produit de deux progressions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on puisse faire évanouir les inconnues  $s$  &  $t$ .

## E X E M P L E.

197. SOIT  $xyy = xyy + aax$  l'équation qui exprime la nature de la courbe AFD. Si l'on met à la place de  $x$  sa valeur  $\frac{sy - st}{t}$ , on formera l'équation  $sy^3 - sty - aty$ , &c.

$$sy^3 - styy + aasy - aast = 0.$$

$$- at$$

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad -2.$$

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

---


$$3sy^3 \quad * \quad - aasy \quad * \quad = 0.$$

qui étant multipliée par 3, 0, -1, 0, produit des deux progressions arithmétiques 1, 0, -1, -2, & 3, 2, 1, 0, donne  $yy = \frac{1}{3}aa$ ; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue  $AE(x) = \frac{1}{4}a$ . Ce qui revient à l'art. 68.

#### AUTRE SOLUTION.

198. ON peut encore résoudre ce Problème en remarquant que du même point L ou K (*Fig. 149. 150. Pl. 8.*) on ne peut mener qu'une seule tangente LF ou KF; parce qu'elle touche en dehors la partie concave AF, & en dedans la convexe FD; au lieu que de tout autre point T ou H, pris sur AL ou AK entre A & L ou A & K, l'on peut mener deux tangentes TM, TD ou HM, HD, l'une de la partie concave, & l'autre de la convexe: de sorte qu'on peut considérer le point d'inflexion F comme la réunion des deux points touchans M & D. Si donc l'on suppose que AT (*s*) ou AH (*t*) soit donnée, & qu'on cherche (*Art. 194.*) la valeur de *x* ou *y* par rapport à *s* ou *t*; l'on aura une équation qui aura deux racines AP, AB, ou PM, BD qui deviennent égales chacune à la cherchée AE ou EF,

Q 2

lorsque  $s$  exprime AL &  $t$ , AK. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique arbitraire, &c.

## EXEMPLE.

199. SOIT comme ci-dessus,  $ayy = xyy + aax$ ; l'on aura encore  $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = 0$ , qui étant multipliée par la progression arithmétique 1, 0, -1, -2, donne  $y^3 * - aay - 2aat = 0$ , dans laquelle  $s$  ne se rencontre plus, & qui a deux racines inégales, sçavoir PM, BD, lorsque  $t$  exprime AH, & deux égales chacune à la cherchée EF lorsque  $t$  exprime AK. C'est pourquoi multipliant de nouveau cette dernière équation par la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, l'on aura  $3yy - aa = 0$ ; & partant EF ( $y$ )  $= \sqrt{\frac{1}{3}aa}$ . Ce qu'il falloit trouver.

## PROPOSITION IV.

## PROBLÈME.

200. MENER d'un point donné C (Fig. 151. Pl. 8.) hors une ligne courbe AMD une perpendiculaire CM à cette courbe.

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur le diamètre AB, & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il est clair qu'il touchera la courbe AMD au point M. Nommant ensuite les inconnues AP,  $x$ ; PM,  $y$ ; CM,  $r$ ; & les connues AK,  $s$ ; KC  $t$ : l'on aura PK ou CE  $= s - x$ , ME  $= y + t$ ; & à cause du triangle rectangle MEC,  $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$ ,

$x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$  : de sorte que mettant ces valeurs à la place de  $y$  ou  $x$  dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle  $y$  ou  $x$  ne se rencontrera plus.

Si l'on décrit à présent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D ; d'où l'on abaisse les perpendiculaires NQ, DB ; il est évident que  $r$  exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente,  $x$  ou  $y$  aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM, lorsque  $r$  exprime le rayon CM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera, &c.

## E X E M P L E.

201. SOIT  $ax = yy$  l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, dans laquelle mettant pour  $x$  sa valeur  $s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$ , l'on aura  $as - yy = a \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$  : de sorte qu'en quarrant chaque membre, & ordonnant ensuite l'équation, l'on trouvera  $y^4$ , &c. qui doit avoir deux racines égales lorsque  $y$  exprime la cherchée PM.

$$y^4 - 2asyy + 2aaty + aass = 0.$$

$$+ aa \quad - aarr$$

$$+ aati$$

$$4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

$$4y^4 - 4asyy + 2aaty - 2aa = 0.$$

$$+ 2aa$$

Q 3

C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique 4, 3, 2, 1, 0, ce qui donnera  $4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = 0$ , dont la résolution fournira pour  $y$  la valeur cherchée MP.

Si le point donné C tomboit sur le diamètre AB (Fig. 152. Pl. 8.); l'on auroit alors  $t = 0$ , & il faudroit effacer par conséquent tous les termes où  $t$  se rencontre; ce qui donneroit  $4as - 2aa = 4yy = 4ax$ , en mettant pour  $yy$  la valeur  $ax$ . D'où l'on tireroit  $x = s - \frac{1}{2}a$ ; c'est-à-dire, que si l'on prend CP égale à la moitié du paramètre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire sur AB, l'on mene la droite CM, elle sera perpendiculaire sur la courbe AMD.

## COROLLAIRE.

202. SI l'on veut à présent que le point M (Fig. 152. Pl. 8.) soit donné, & que le point C soit celui qu'on cherche; il faudra dans la dernière équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP ( $x$ ) ou PM ( $y$ ), regarder ces dernières comme connues, & l'autre comme l'inconnue.

## DÉFINITION II.

Si d'un rayon quelconque de la développée, l'on décrit un cercle, il sera nommé *cercle baissant*.

Le point où ce cercle touche ou baise la courbe, est appelé *point baissant*.

## PROPOSITION V.

## PROBLÈME.

203. **L**A nature de la courbe AMD (Fig. 153. Pl. 8.) étant donnée avec un de ses points quelconques M ; trouver le centre C du cercle qui la baise en ce point M.

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problème précédent ; l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut observer que la lettre  $x$  ou  $y$ , que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée ; & qu'au contraire  $s$ ,  $t$ , que l'on y regarde comme connues, sont en effet ici les inconnues aussi bien que  $r$ .

Cela posé, il est clair 1°. Que le point cherché C sera situé sur la perpendiculaire MG à la courbe.  
 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en M, & la coupera au moins en deux points (dont je suppose que le plus proche est D, d'où l'on abaissera la perpendiculaire DB) ; puisque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbée quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant M n'équivaut qu'à deux intersections.  
 3°. Que plus son centre G approche du point cherché C, plus aussi le point d'intersection D approche du point touchant M : de sorte que le point G tombant sur le point C, le point D se réunit

Q 4



avec le point M; puisque (*Art.* 76.) le cercle décrit du rayon CM, doit toucher & couper la courbe au même point M. D'où l'on voit que  $s$  exprimant AF, &  $t$ , FG, l'équation doit avoir deux racines égales, sçavoir (*Art.* 200.) chacune à AP ou PM selon qu'on a fait évanouir  $y$  ou  $x$ , & une autre AB ou BD qui devient aussi égale à AP ou PM, lorsque  $s$  &  $t$  expriment les cherchées AK, KC; & qu'ainsi cette équation doit avoir trois racines égales.

## E X E M P L E.

204. SOIT  $ax=yy$  l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, & l'on trouvera (*Art.* 201.)  $y^4$ , &c. qui étant multipliée par 8, 3, 0, — 1, 0, produit des deux progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 2, 1, 0, — 1, — 2 donne  $8y^4 = 2aaty$ .

$$\begin{array}{r}
 y^4 \quad * \quad - 2asyy + 2aaty + aass = 0. \\
 \quad \quad + aa \quad \quad \quad - aarr \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + aatt
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4, \quad 3, \quad 2, \quad \quad 1, \quad \quad 0, \\
 2, \quad 1, \quad 0, \quad - 1, \quad - 2.
 \end{array}$$

---


$$8y^4 \quad * \quad * \quad - 2aaty \quad * \quad = 0.$$

D'où l'on tire la cherchée KC ou PE ( $t$ ) =  $\frac{4y^3}{aa}$ .

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui passe par tous les points C, l'on multipliera encore  $y^4$ , &c. par 0, 3, 4, 3, 0, produit des deux progressions 4, 3, 2, 1, 0, & 0, 1, 2, 3, 4; & l'on trouvera  $8aty$

—  $4aay = 6aat$  : d'où , en supposant pour abrégier  
 $s - \frac{1}{2}a = u$  , l'on tirera  $y = \frac{3at}{4u}$  , &  $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3}$   
 $= aat$  ; & partant  $16u^3 = 27att$ . D'où il suit que  
la courbe qui passe par tous les points C , est une  
seconde parabole cubique , dont le paramètre  
 $= \frac{27a}{16}$  , & dont le sommet est éloigné de celui de  
la parabole proposée de  $\frac{1}{2}a$  ; parce que  $u = s - \frac{1}{2}a$ .

Lorsque la position des parties de la courbe ,  
voisines du point donné M , est entièrement sem-  
blable de part & d'autre de ce point , comme il  
arrive lorsque la courbure y est la plus grande  
ou la moindre ; il s'ensuit que l'une des inter-  
sections du cercle touchant ne peut se réunir  
avec le point touchant , que l'autre ne s'y réunisse  
en même temps : de sorte que l'équation doit avoir  
alors quatre racines égales. En effet , si l'on multi-  
plie  $y^4$  , &c. par 24 , 6 , 0 , 0 , 0 , produit des trois  
progressions arithmétiques 4 , 3 , 2 , 1 , 0 , &  
3 , 2 , 1 , 0 , — 1 , & 2 , 1 , 0 , — 1 , — 2 ;  
l'on aura  $24y^4 = 0$  : ce qui fait voir que le point  
M doit tomber sur le sommet A de la parabole ,  
afin que la position des parties voisines de la cour-  
be soit semblable de part & d'autre.

## AUTRE SOLUTION.

205. **O**N peut encore (*Fig. 154. Pl. 8.*) résoudre  
ce Problème en se souvenant que l'on a dé-  
montré dans l'article 76 qu'on ne peut mener  
du point cherché C qu'une seule perpendiculaire

**C**M à la courbe **A**MD; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points **G** sur cette perpendiculaire **MC**, d'où l'on peut mener deux perpendiculaires **MG**, **GD** à la courbe. Si donc on suppose que le point **G** soit donné, & que l'on cherche (*Art.* 200.) la valeur de  $x$  ou  $y$  par rapport aux données  $s$  &  $t$ ; il est visible que cette équation doit avoir deux racines inégales, sçavoir **AP**, **AB** ou **PM**, **BD** qui deviennent égales entr'elles lorsque le point **G** tombe sur le point cherché **C**. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique quelconque, &c.

## E X E M P L E.

206. **S**OIT comme ci-dessus  $ax = yy$ ; & l'on aura (*Art.* 101.)  $4y^3$ , &c.

$$4y^3 * - 4asy + 2aat = 0.$$

$$+ 2aa$$

$$2, 1, 0, -1.$$

---


$$8y^3 * \quad * - 2aat = 0.$$

qui étant multipliée par la progression arithmétique  $2, 1, 0, -1$ , donne comme (*Art.* 204.) auparavant  $t = \frac{4y^3}{aa}$ .

## C O R O L L A I R E.

207. **I**L est évident qu'on peut (*Fig.* 153. 154. *Pl.* 8.) considérer le point baissant comme (*Art.* 203.) la réunion d'un point touchant avec un point d'intersection du même cercle; ou bien comme (*Art.* 205.) la réunion de deux points

touchans de deux cercles différens & concentriques : de même que le point d'inflexion peut être regardé (*Art.* 196.) comme la réunion d'un point touchant avec un point d'intersection de la même droite, ou (*Art.* 198.) comme la réunion de deux points touchans de deux différentes droites qui partent d'un même point.

## PROPOSITION VI.

## PROBLÈME.

208. **T**ROUVER une équation qui exprime la nature de la caustique  $AFGK$ , (*Fig.* 155. *Pl.* 8.) formée dans le quart de cercle  $CAMNB$ , par les rayons réfléchis  $MH$ ,  $NL$ , &c. dont les incidens  $PM$ ,  $QN$ , &c. sont parallèles à  $CB$ .

Je remarque, 1<sup>o</sup>. Que si l'on prolonge les rayons réfléchis  $MF$ ,  $NG$ , qui touchent la caustique en  $F$ ,  $G$ , jusqu'à ce qu'ils rencontrent le rayon  $CB$  aux points  $H$ ,  $L$ ; l'on aura  $MH$  égale à  $CH$ , &  $NL$  égale à  $CL$ . Car l'angle  $CMH = CMP = MCH$ ; & de même l'angle  $CNL = CNQ = NCL$ .

2<sup>o</sup>. Que d'un point donné  $F$  sur la caustique  $AFK$ , l'on ne peut mener qu'une seule droite  $MH$  qui soit égale à  $CH$ ; au lieu que d'un point donné  $D$  entre le quart de cercle  $AMB$  & la caustique  $AFK$ , l'on peut mener deux lignes  $MH$ ,  $NL$  telles que  $MH = CH$  &  $NL = CL$ . Car on ne peut mener du point  $F$  qu'une seule tangente  $MH$ ; au lieu que du point  $D$ , on en peut mener deux  $MH$ ,  $NL$ . Ceci bien entendu

Soit proposé de mener d'un point donné  $D$  la

droite MH, enforte qu'elle soit égale à la partie CH, qu'elle détermine sur le rayon CB.

Ayant mené MP, DO parallèles à CB, & MS parallèle à CA, soient nommées les données CO ou RS,  $u$ ; OD,  $z$ ; AC ou CB,  $a$ ; & les inconnues CP ou MS,  $x$ ; PM ou CS,  $y$ ; CH ou MH,  $r$ . Le triangle rectangle MSH donnera  $rr = rr - 2ry + yy + xx$ : d'où l'on tire  $CH (r) = \frac{xx + yy}{2y}$ . De plus les triangles semblables MRD, MSH donneront  $MR (x - u) : MS (x) :: RD (z - y) : SH$   
 $= \frac{zx - xy}{x - u}$ . & partant  $CS + SH$  ou  $CH = \frac{zx - uy}{x - u}$   
 $= \frac{xx + yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$  en mettant pour  $xx + yy$  sa valeur  $aa$ . D'où l'on forme (en multipliant en croix) l'équation  $aax - aa u = 2zxy - 2uyy$ ; & mettant pour  $yy$  sa valeur  $aa - xx$ , il vient  $2zxy = aax + aa u - 2uxx$ : quarrant ensuite chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant encore pour  $yy$  sa valeur  $aa - xx$ , l'on aura enfin  
 $4uux^4 - 4aaux^3 - 4aa u u x x + 2a^4 u x + a^4 u u = 0$ .  
 $4z z \quad \quad \quad - 4aa z z$   
 $\quad \quad \quad + a^4$

Or il est clair que  $u$  exprimant CO; &  $z$ , OD; cette égalité doit avoir deux racines inégales, sçavoir CP, CQ: & qu'au contraire  $u$  exprimant CE; &  $z$ , EF; CQ devient égale à CP, de sorte qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi si l'on multiplie ses termes par ceux des deux progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 0, 1, 2, 3, 4, l'on formera deux égalités nouvelles par le moyen

desquelles on trouvera , après avoir fait évanouir l'inconnue  $x$  , cette équation.

$$64z^6 - 48aaz^4 + 12a^4zz - a^6 = 0, \\ + 192uu - 96aaau - 15a^4uu \\ + 192u^4 - 48aaau^2 \\ + 64u^6$$

qui exprime la relation de la coupée CE ( $u$ ) à l'appliquée EF ( $z$ ). Ce qu'il falloit trouver.

On peut déterminer le point touchant F en se servant de la méthode expliquée dans la huitieme Section. Car si l'on imagine un autre rayon incident  $pm$  infiniment proche de PM ; il est clair que le réfléchi  $mh$  coupera MH au point cherché F , par lequel ayant tiré FE parallele à PM , l'on nommera CE ,  $u$  ; EF ,  $z$  ; CP ,  $x$  ; PM ,  $y$  ; CM ,  $a$  : & l'on trouvera comme ci-dessus  $\frac{aax + aa u - 2uxx}{xy}$

$= 2z$ . Or il est visible que CM , CE , EF demeurent les mêmes pendant que CP & PM varient. C'est pourquoi l'on prendra la différence de cette équation en traitant  $a$  ,  $u$  ,  $z$  , comme constantes , &  $x$  ,  $y$  , comme variables ; ce qui donnera  $2uyxxdx + aa u y dx - aax x dy - aa u x dy + 2ux^2 dy = 0$  , dans laquelle mettant pour  $dx$  sa valeur  $-\frac{y dy}{x}$  (que l'on trouve en prenant la différence de  $yy = aa - xx$ ) , & ensuite pour  $yy$  sa valeur  $aa - xx$  , il vient enfin CE ( $u$ )  $= \frac{x^3}{aa}$ .

Si l'on suppose que la courbe AMB ne soit plus un quart de cercle , mais une autre courbe quelconque qui ait pour rayon de sa développée au

point M la droite MC ; il est clair ( *Art. 76.* ) que la petite portion Mm peut être regardée comme un arc de cercle décrit du centre C. D'où il suit que si l'on mène par ce centre la perpendiculaire CP sur le rayon incident PM , & qu'ayant pris  $CE = \frac{x^3}{aa}$  (  $CP = x$  ,  $CM = a$  ) l'on tire EF parallèle à PM ; elle ira couper le rayon réfléchi MH au point F , où il touche la caustique AFK.

Si l'on tire par tous les points M, m d'une ligne courbe quelconque AMB, des lignes droites MC, mC à un point fixe C de son axe AC, & d'autres droites MH, mh terminées par la perpendiculaire CB à l'axe, en sorte que l'angle CMH = MCH, & Cmh = mCh ; & qu'il faille trouver sur chaque MH le point F où elle touche la courbe AFK, formée par les intersections continuelles de ces droites MH, mh. On trouvera comme auparavant

$$CH = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{zx - uy}{x - u} : \text{d'où l'on tire :}$$

$$\frac{x^3 + uyy + xyy - uxx}{xy} = 2z, \text{ dont la différence}$$

( en traitant  $u, z$  comme constantes, &  $x, y$  comme variables ) donne  $2x^3ydx - uxx ydx - x^4dy + ux^3dy + xxyydy + uxyydy - uy^3dx = 0$  ; & partant la cherchée CE (  $u$  )

$= \frac{2x^3ydx - x^4dy + xxyydy}{xxydx - x^3dy + y^3dx - xyydy}$ . Or la nature de la ligne AMB étant donnée, l'on aura une valeur de  $dy$  en  $dx$ , laquelle étant substituée dans l'expression de CE, cette expression sera délivrée des différences & entièrement connue.

## PROPOSITION VII.

## PROBLÈME.

209. **S**OIT une ligne droite indéfinie AO (Fig. 156. Pl. 8.) qui ait un commencement fixe au point A; soit entendue une infinité de paraboles BFD, CDG qui aient pour axe commun la droite AO, & pour paramètres les droites AB, AC interceptées entre le point fixe A, & leurs sommets B, C. On demande la nature de la ligne AFG qui touche toutes ces paraboles.

Je remarque d'abord que deux quelconques de ces paraboles BFD, CDG se couperont en un point D situé entre la ligne AFG & l'axe AO; que AC devenant égal à AB, le point d'intersection D tombe sur le point touchant F. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener par le point donné D une parabole qui ait la propriété marquée. Si l'on mène l'appliquée DO, & qu'on nomme les données AO,  $u$ ; OD,  $z$ ; & l'inconnue AB,  $x$ ; la propriété de la parabole donnera  $AB \times BO (ux - xx) = \overline{DO}^2 (zz)$ ; & ordonnant l'égalité, l'on aura  $xx - ux + zz = 0$ . Or il est évident que  $u$  exprimant AO; &  $z$ , OD; cette égalité a deux racines inégales, sçavoir AB, CA: & qu'au contraire  $u$  exprimant AE; &  $z$ , EF; A-C devient égale à AB, c'est-à-dire, qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique 1, 0, — 1: ce qui donne  $x = z$ ; & substituant cette valeur à la place de  $x$ , il vient l'équation  $u = 2z$  qui doit exprimer la nature de la ligne AFG. D'où l'on voit que AFG est une ligne droite faisant avec AO l'angle FAO tel que AE est double de EF.



Si l'on veut résoudre cette question en général, de quelque degré que puissent être les paraboles BFD, CDG; on se servira de la Méthode expliquée dans la Section huitième, en cette sorte. Nommant AE,  $u$ ; EF,  $z$ ; AB,  $x$ ; l'on aura  $u - x^m \times x^n = z^{m+n}$  qui exprime en général la nature de la parabole BF, dont la différence donne (en traitant  $u$  &  $z$  comme constantes, &  $x$  comme variable)

$$-m \times u - x^{m-1} dx \times x^n + nx^{n-1} dx \times u - x^m = 0;$$

& divisant par  $u - x^{m-1} dx \times x^n$ , il vient  $-mx$

$$+ nu - nx = 0 : \text{d'où l'on tire } x = \frac{n}{m+n} u; \quad \&$$

partant  $u - x = \frac{m}{m+n} u$ . Mettant donc ces va-

leurs à la place de  $u - x$ , & de  $x$  dans l'équation

générale; & faisant (pour abrégier)  $\frac{m}{m+n} = p$ ,

$$\frac{n}{m+n} = q, \quad m+n = r, \quad \text{l'on aura } z = u \sqrt[r]{p^m q^n}.$$

D'où l'on voit que la ligne AFG est toujours droite, si composées que puissent être les paraboles, n'y ayant que la raison de AE à EF qui change.

*On voit clairement par ce que l'on vient d'expliquer dans cette Section, de quelle manière l'on doit se servir de la Méthode de Mr. Descartes & Hudde pour résoudre ces sortes de questions lorsque les Courbes sont Géométriques. Mais l'on voit aussi en même temps qu'elle n'est pas comparable à celle de M. Leibnits, que j'ai tâché d'expliquer à fond dans ce Traité: puisque cette dernière donne des résolutions générales, où l'autre n'en fournit que de particulières; qu'elle s'étend aux lignes transcendentes, & qu'il n'est point nécessaire d'ôter les incommensurables; ce qui seroit très souvent impraticable.*

COMMENTAIRE



# COMMENTAIRE

Des articles les plus difficiles de l'Analyse  
des Infiniment Petits.

*La Préface que nous avons mise à la tête de l'Analyse des Infiniment Petits, nous dispense de donner ici une idée générale du Commentaire que nous mettons à la suite de cet admirable Traité. Ce Commentaire n'est pas distingué des Notes suivantes.*

## NOTE I.

**L**A demande, ou plutôt la supposition de l'article 2. pag. 3. que les Commençaans n'accordent qu'avec peine, ne contient rien dans le fond qui ne soit bien raisonnable.

En effet, l'on regarde comme infiniment exactes les opérations des Géomètres & des Astronomes; ils font cependant tous les jours des omissions beaucoup plus considérables que celles des Algébristes. Lorsqu'un Géomètre, *par exemple*, prend la hauteur d'une montagne, fait-il attention à un grain de sable que le vent enlève de dessus son sommet? Lorsque les Astronomes nous parlent des étoiles fixes, ne négligent-ils pas le diamètre de la Terre dont la valeur est d'environ trois mille lieues? Lorsqu'ils calculent les éclipses de Lune, ne regardent-ils pas la Terre comme sphérique,

R

& par conséquent ont-ils égard aux maisons , aux tours , aux montagnes qui se trouvent sur la surface ? Or tout cela est beaucoup moins à négliger que  $dx$  , puisqu'il faut un nombre infini de  $dx$  , pour faire  $x$  ; donc le calcul différentiel est dans le fond le plus sûr des calculs ; donc la demande de l'article 2. ne contient rien que de raisonnable. Toutes ces comparaisons sont tirées du Cours de Mathématique de Wolf, *Tom. 1. pag. 418.*

## NOTE II.

L'ARTICLE 5. *pag. 5.* a besoin d'un Commentaire dans toutes les formes. On convient que la différence de  $xy$  est  $ydx + xdy + dxdy$  ; mais on ajoute qu'on peut sans erreur sensible omettre dans la pratique  $dxdy$ . L'on a raison ; en voici la démonstration la plus rigoureuse. Pour la mettre à la portée de tout le monde , reprenons les choses d'un peu loin.

1°. Toute grandeur infinie se marque par quel qu'un des caractères  $\infty$  ,  $\infty^2$  ,  $\infty^3$  &c.

2°. Le premier de ces caractères marque un infini du premier ordre , le second un infini du second ordre , le troisieme un infini du troisieme ordre &c.

3°. Un infini du second ordre est infiniment plus grand qu'un infini du premier ordre , & ainsi d'un infini du troisieme ordre par rapport à un infini du second.

4°. Une quantité infinie ne peut pas être augmentée par l'addition d'aucune quantité finie ,

ni diminuée par la soustraction d'aucune quantité finie. Ainsi  $\infty + 1 = \infty$ ; de même  $\infty - 4 = \infty$ . Ce que l'on a dit de l'infini par rapport au fini, on doit le dire de l'infini d'un ordre supérieur vis-à-vis l'infini d'un ordre inférieur. Ainsi  $\infty^2 + \infty = \infty^2$ ; de même  $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$ . *Voyez-en la preuve dans la note précédente.*

5°. Toute grandeur infiniment petite est représentée par une fraction dont le numérateur est un fini & le dénominateur un infini. Ainsi  $\frac{1}{\infty}$ ,  $\frac{1}{\infty^2}$ ,

$\frac{1}{\infty^3}$  &c. sont des fractions qui représentent des grandeurs infiniment petites du premier, du second & du troisième ordre. Une grandeur infiniment petite est encore représentée par une fraction dont le numérateur est un infini d'un ordre inférieur à celui du dénominateur. Ainsi  $\frac{\infty}{\infty^2}$  représente une grandeur infiniment petite. En effet,  $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$ .

6°. Un infiniment petit du second ordre représente une grandeur infiniment plus petite qu'un infiniment petit du premier ordre, & ainsi des autres à l'infini.

7°. Une quantité infiniment petite n'est rien par rapport à une quantité finie. Ainsi  $1 + \frac{1}{\infty} = 1$ ;  $1 - \frac{1}{\infty} = 1$ . De même un infiniment petit du second ordre n'est rien vis-à-vis un infiniment

petit du premier ordre. Ainsi  $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$  ;  
 $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$ . Vous en trouverez la preuve  
 dans la *note précédente*.

8°.  $xy$  est le produit de  $x$  multipliant  $y$ .

9°.  $xy + ydx + xdy + dxdy$  est le produit de  
 $x + dx$  multipliant  $y + dy$ , c'est-à-dire, est le  
 produit de  $x$  augmenté d'une quantité infiniment  
 petite, par  $y$  qui se trouve aussi augmenté d'une  
 quantité infiniment petite ; donc  $ydx + xdy + dxdy$   
 est la différence de  $xy$ .

10°.  $dxdy$  est une quantité infiniment petite, du  
 second ordre par rapport à  $ydx + xdy$  qu'on doit  
 regarder comme des quantités infiniment petites  
 du premier ordre. En effet, prenons le rectangle  
 $ABCD$  ou  $xy$ , *Fig. 157. Pl. 8*. Augmentons sa  
 base  $CD$  ou  $y$  de la quantité infiniment petite  
 $Dn$  ou  $dy$ , & sa hauteur  $BD$  ou  $x$  de la hauteur  
 infiniment petite  $Dp$  ou  $dx$  ; il est évident que  
 le rectangle infiniment petit  $Bm Dn$  ou  $x dy$ , &  
 le rectangle infiniment petit  $CD op$  ou  $y dx$  sont des  
 rectangles infiniment plus grands que le rectangle  
 $Dnpr$  ou  $dxdy$ , parce que chacun des deux pre-  
 miers est le produit d'une quantité finie par une  
 quantité infiniment petite, au lieu que le second  
 est le produit de deux quantités infiniment peti-  
 tes ; donc  $dxdy$  est une quantité infiniment plus  
 petite que  $ydx$  ou que  $xdy$  ; donc on peut sans er-  
 reur sensible la négliger dans la pratique ; donc si  
 la différence de  $xy$  est  $ydx + xdy + dxdy$ , elle fe-  
 ra  $ydx + xdy$ .

11°. Il est donc vrai que la différence d'un produit composé de deux quantités contient la différence de la première quantité multipliée par la seconde, + la différence de la seconde quantité multipliée par la première. Il n'est pas moins vrai que la différence d'un produit composé de trois quantités se trouve en multipliant le produit des quantités posées de deux en deux par la différence de la troisième. La différence, *par exemple*, de  $xyz$  est  $yzdx + xzdy + xydz$ ; en voici la démonstration.

Je fais  $xy = u$ ; donc la différence de  $u$  sera la même que la différence de  $xy$ ; donc  $ydx + xdy = du$ .

De plus  $xy = u$ , donc  $xyz = uz$ ; donc la différence de  $xyz$  sera la même que la différence de  $uz$ ; donc la différence de  $xyz$  est  $zdu + udz$ . Mais  $zdu = yzdx + xzdy$ , parce que  $du = ydx + xdy$ ; &  $udz = xydz$ , parce que  $xy = u$ ; donc  $zdu + udz = yzdx + xzdy + xydz$ ; donc si la différence de  $xyz$  est  $zdu + udz$ , elle sera par-là même  $yzdx + xzdy + xydz$ ; donc la différence d'un produit composé de trois quantités se trouve en multipliant le produit des quantités posées de deux en deux par la différence de la troisième. Par là même raison l'on aura la différence d'un produit composé de 4 quantités, en multipliant le produit des quantités posées de trois en trois par la différence de la quatrième. La différence du produit  $uxyz$  est donc  $xyzdu + uy zdx + ux zdy + uxyzdz$ . En général la différence du produit de plusieurs quan-

tités multipliées les unes par les autres est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres. M. de l'Hôpital avance, *par exemple*, que la différence de  $\frac{a+x}{a+x} \times \frac{b-y}{b-y}$  est  $b dx - a dy - y dx - x dy$ . Il a raison. En effet,  $\frac{a+x}{a+x} \times \frac{b-y}{b-y} = ab + bx - ay - xy$ . Mais  $ab$  n'ayant point de différence, celle de ce dernier produit est évidemment  $b dx - a dy - y dx - x dy$ , donc &c.

## NOTE III.

M. le Marquis de l'Hôpital assure, à l'article 6. pag. 6. que  $\frac{y dx - x dy}{yy}$  est la différence de  $\frac{x}{y}$ . Pour le démontrer, je fais  $\frac{x}{y} = z$ ; & j'avance que dans cette hypothèse l'on aura  $dz = \frac{y dx - x dy}{yy}$ , donc l'on aura par là même  $\frac{y dx - x dy}{yy}$  pour la différence de la fraction  $\frac{x}{y}$ . Le calcul suivant en fera la preuve évidente.

1.  $\frac{x}{y} = z$  par hypothèse.
2.  $x = yz$
3.  $dx = z dy + y dz$
4.  $y dz = dx - z dy$
5.  $dz = \frac{dx}{y} - \frac{z dy}{y}$
6.  $dz = \frac{dx}{y} - z d$

$$7. \quad dz = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}$$

$$8. \quad dz = \frac{ydx - xdy}{yy}$$

## E X P L I C A T I O N .

1°. La premiere équation est une pure supposition, qu'on ne peut accorder, qu'en accordant que la seconde équation est incontestable.

2°. La troisieme équation est fondée sur ce principe ; si  $x = yz$ , donc la différence de  $x$  sera égale à la différence de  $yz$ .

3°. La quatrieme équation a été formée par les règles ordinaires, c'est-à-dire, en transportant dans l'autre membre de l'équation la quantité  $+ zdy$ , après l'avoir affectée du signe  $-$ .

4°. En divisant par  $y$  la quatrieme équation, l'on a eu la cinquieme équation, & en ôtant dans celle-ci les lettres qui se détruisent, l'on a eu la fixieme équation.

5°. Pour trouver la septieme équation, l'on a substitué dans le second membre de la fixieme à  $z$  la valeur  $\frac{x}{y}$ .

6°. La huitieme équation est la même que la septieme, aux yeux de quiconque sçait les premiers éléments de l'Algèbre ; donc si celle-ci est bonne, celle-là le sera aussi ; donc la différence d'une fraction est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, — au produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dé-

R 4



nominateur ; donc la différence de  $\frac{a}{x}$  est  $\frac{-adx}{xx}$ ,  
 parce que le numérateur  $a$  n'a point de différence ;  
 donc la différence de  $\frac{x}{a+x}$  est  $\frac{adx + xdx - xdx}{aa + 2ax + xx}$   

$$= \frac{adx}{aa + 2ax + xx}.$$

## NOTE IV.

L'ARTICLE 7, page 7, demande une foule d'éclaircissements ; ils seront renfermés dans les réponses aux questions suivantes.

*Première Question.* Comment pourroit-on prouver que  $-1$  est l'exposant de  $\frac{1}{x}$  ?

*Réponse.*  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ . En effet  $x^{-1} \times x^2 = x^{2-1} = x$  ; donc  $x$  est le produit du multiplicande  $x$  par le multiplicateur  $x^{-1}$  ; donc  $\frac{x}{x^2} = x^{-1}$ , parce que la division du produit par le multiplicande donne pour quotient le multiplicateur. Mais  $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$  ; donc  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  ; donc en général une quantité élevée à une puissance dont l'exposant est un nombre entier négatif, n'est autre que l'unité divisée par la puissance positive de cette quantité ; donc  $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$  ; donc  $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$  &c.

*Seconde Question.* Est-il vrai que  $\sqrt{x}$  ait pour exposant  $\frac{1}{2}$  ?

Réponse. Cela est vrai, & en voici la preuve.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ; mais  $x^{\frac{1}{2}}$  a pour exposant  $\frac{1}{2}$ , donc  $\sqrt{x}$  a pour exposant  $\frac{1}{2}$ . Il s'agit donc de démontrer que  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ . La chose n'est pas difficile. Voici comment il faut s'y prendre.

$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^1 = x$ ; donc  $x^{\frac{1}{2}}$  est la racine quarrée de  $x$ . Mais  $\sqrt{x}$  est la racine quarrée de  $x$ ; donc  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ; donc en général une quantité quelconque élevée à une puissance fractionnaire n'est autre chose que la racine d'une puissance dont l'exposant est le numérateur de la fraction, & le dénominateur est l'exposant de la racine; donc  $\sqrt[3]{x^1} = x^{\frac{1}{3}}$ ; donc  $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$ .

Troisième Question. A quoi équivaut  $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ?

Réponse.  $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{1}{2}}$ . Je le démontre.  $\sqrt{x^3}$

$= x^{\frac{3}{2}}$  (question 2<sup>e</sup>.); donc  $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ . Mais  $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$= x^{-\frac{3}{2}}$  (question 1<sup>re</sup>.) donc  $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$ ;

donc  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$ ; donc  $\frac{1}{\sqrt{x^7}} = x^{-\frac{7}{2}}$ .

Quatrième Question. Est-il vrai que 1,  $\sqrt{x}$ ,  $x$  forment une progression géométrique?

*Réponse.* Il est évident que  $1 : \sqrt[2]{x} :: \sqrt[2]{x} : x$  ; car  $1 \times x = x$ , &  $\sqrt[2]{x} \times \sqrt[2]{x} = x$  ; donc  $1, \sqrt[2]{x}, x$  sont trois termes en progression géométrique.

Leurs trois exposants  $0, \frac{1}{2}, 1$  forment une progression arithmétique ; car  $0 + 1 = 1$ , &  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

*Corollaire I.*  $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$  sont en progression géométrique. En effet,  $1 : x^{\frac{1}{3}} :: x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}}$ , car  $1 \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ , &  $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ . De plus  $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}} :: x^{\frac{2}{3}} : x^1$ , car  $x^{\frac{1}{3}} \times x^1 = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$ , &  $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$  ; donc  $1, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, x$ , ou  $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$  sont en progression géométrique.

Pour leurs exposants  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  ; ils sont en progression arithmétique. En voici la preuve.  $0 : \frac{1}{3} :: \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ , puisque la somme des extrêmes  $0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ , & que la somme des moyennes  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . De plus  $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} :: \frac{2}{3} : 1$ , puisque  $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ , & que  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$  ; donc les exposants  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  sont en progression arithmétique.

*Corollaire II.* Par la même raison,  $1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x$ , ou  $1, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{2}{5}}, x^{\frac{3}{5}}, x^{\frac{4}{5}}, x$  sont en progression géométrique ; & leurs exposants  $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$  ou  $\frac{5}{5}$  sont en progression arithmétique.

*Cinquième Question.*  $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}, \frac{1}{xx}$  sont-ils en progression géométrique ?

*Réponse.*  $x^{-1}$ ,  $x^{-\frac{1}{2}}$ ,  $x^{-2}$  sont en progression géométrique ; car  $x^{-1} \times x^{-2} = x^{-3}$ , &  $x^{-\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}} = x^{-1} = x^{-3}$  ; donc  $x^{-1}$ ,  $x^{-\frac{1}{2}}$ ,  $x^{-2}$  ou  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $\frac{1}{xx}$  sont en progression géométrique.

Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que leurs exposants  $-1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-2$  sont en progression arithmétique ; la chose saute aux yeux. Il en est de même des autres progressions géométriques & arithmétiques que propose M. le Marquis de l'Hôpital ; elles se présentent à tout Commencant qui sçait délivrer une quantité quelconque de son signe radical , en lui donnant un exposant fractionnaire.

*Sixieme Question.* Comment peut-on démontrer que  $2x dx$  est la différence de  $xx$ .

*Réponse.*  $xx$  est le produit de  $x$  par  $x$ . La différence d'un produit composé de deux quantités contient (*Note 2<sup>e</sup>.*) la différence de la première quantité multipliée par la seconde, + la différence de la seconde quantité multipliée par la première ; donc la différence de  $xx$  est  $x dx + x dx = 2x dx$ .

L'on prouvera par la même *note* que la différence de  $x^3$  est  $3x^2 dx$  ; que celle de  $x^4$  est  $4x^3 dx$  ; & qu'en général la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable , est égale au produit de l'exposant de cette

puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par la différence. En nommant donc  $m$  un exposant quelconque entier positif, l'on dira que la différence de  $x^m$  est  $m x^{m-1} dx$ . De même en nommant  $\frac{m}{n}$  un exposant quelconque fractionnaire po-

sitif, l'on aura  $\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$ , ou  $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$ ,

pour la différence de  $x^{\frac{m}{n}}$ . Enfin en prenant  $-m$  pour un exposant quelconque entier négatif, &  $-\frac{m}{n}$  pour un exposant quelconque fractionnaire négatif, l'on aura  $-m x^{-m-1} dx$  pour la différence de  $x^{-m}$ , &  $-\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m+n}{n}} dx$

pour la différence de  $x^{-\frac{m}{n}}$ .

*Septieme Question.* Comment peut-on démontrer que  $-m x^{-m-1} dx = \frac{-m x^{m-1} dx}{x^{2m}}$  ?

*Réponse.* Pour démontrer que  $-m x^{-m-1} dx = \frac{-m x^{m-1} dx}{x^{2m}}$ , multiplions les deux membres de cette équation par  $x^{2m}$ , nous aurons  $-m x^{-m+2m-1} dx = -m x^{m-1} dx$ , ou  $-m x^{m-1} dx = -m x^{m-1} dx$ ; donc, après la multiplication, les deux produits se sont trouvés égaux; donc les deux multiplicandes l'étoient avant la multiplication. Mais les deux multiplicandes étoient les

deux membres de l'équation —  $mx^{\frac{m}{n}-1}dx$   
 $= \frac{-mx^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}}$ ; donc ces deux membres étoient  
 réellement égaux.

L'on prouvera de la même maniere que

$$\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx; \text{ donc en}$$

général la différence d'une puissance quelconque  
 parfaite ou imparfaite d'une quantité variable est  
 égale au produit de l'exposant de cette puissance,  
 par cette même quantité élevée à une puissance  
 moindre d'une unité, & multipliée par sa différen-  
 ce. Concluez de là qu'il n'est pas nécessaire de fai-  
 re  $x^{\frac{m}{n}} = z$ , pour trouver la différence d'une puis-  
 sance quelconque imparfaite.

*Huitieme Question.* Quelle est la différence du  
 cube de  $ay - xx$ ?

*Réponse.* La différence demandée est  $3a^3yydy$   
 $- 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyx dx + 12ayx^3dx$   
 $- 6x^5dx$ , parce que le cube de  $ay - xx$  est  $a^3y^3$   
 $- 3aayyx^2 + 3ayx^4 - x^6$ . En effet, la différence de  
 $a^3y^3$  est  $3a^3yydy$  (question 6.) La différence de  
 $- 3aayyx^2$  est  $- 6aaxxydy - 6aayyx dx$  (même  
 question). La différence de  $+ 3ayx^4$  est  $+ 3ax^4dy$   
 $+ 12ayx^3dx$  (même question). Enfin la différence  
 de  $- x^6$  est  $- 6x^5dx$ , (même question); donc la  
 différence assignée est la véritable différence du  
 cube de  $ay - xx$ .

*Neuvième Question.* Quelle est la différence du radical  $\sqrt{xy + yy}$  ?

*Réponse.* La différence demandée est  $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$ . En voici la démonstration.

Pour la mettre à la portée de tout le monde, je fais  $\sqrt{xy + yy} = u$ . Cela supposé, voici comment je raisonne.

1°.  $u = \sqrt{xy + yy}$  ; donc la différence de  $u$  sera la même que la différence de  $\sqrt{xy + yy}$ .

2°.  $u = \sqrt{xy + yy}$  ; donc  $uu = xy + yy$  ; donc la différence de  $uu$  sera la même que la différence de  $xy + yy$  ; donc  $2udu = ydx + xdy + 2ydy$ .

3°.  $2udu = ydx + xdy + 2ydy$  ; donc  $d u = \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2u}$  ; donc  $du = \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$ ,

parce que  $u = \sqrt{xy + yy}$  ; donc dans l'hypothèse proposée la différence de  $u$  est  $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$ .

Mais dans cette même hypothèse la différence de  $u$  est la même que la différence de  $\sqrt{xy + yy}$  ; donc la différence de  $\sqrt{xy + yy}$  est  $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$ .

*Corollaire I.* En faisant  $\sqrt{a^4 + axyy} = u$ , vous trouverez par le même calcul que la différence de ce radical est  $\frac{a^4 + ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$ .

*Corollaire II.* En faisant  $\sqrt[3]{ax + xx} = u$ , l'on trouvera que la différence de ce radical est  $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{ax + xx^2}}$  ; en voici la preuve la plus détaillée.

1°.  $u = \sqrt[3]{ax + xx}$ ; donc  $u = \sqrt[3]{ax + xx^{\frac{1}{3}}}$  (question 2<sup>e</sup>.); donc  $uu = \sqrt[3]{ax + xx^{\frac{2}{3}}}$ ; donc  $uu = \sqrt[3]{ax + xx^2}$  (même question).

2°.  $u = \sqrt[3]{ax + xx}$ ; donc  $uuu = ax + xx$ ; donc  $3uudu = adx + 2xdx$  (question 6<sup>e</sup>.)

3°.  $3uudu = adx + 2xdx$ ; donc  $du = \frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{ax + xx^2}}$ ,

parce que  $uu = \sqrt[3]{ax + xx^2}$  (num. 1.); mais la différence du radical  $\sqrt[3]{ax + xx}$  est la même que celle de  $u$ ; donc elle sera  $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{ax + xx^2}}$ .

*Dixième Question.* Quelle est la différence du radical  $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ .

*Réponse.* La différence demandée est  $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$ .

Pour le démontrer, faisons  $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}} = u$ ; & voyons ce que vaudra  $du$  dans cette hypothèse.

1°.  $u = \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ ; donc  $uu = ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}$ ; donc  $2uudu = adx + 2xdx + ayydx + 2axydy$ ; donc  $du$  sera égal à  $adx + 2xdx$

divisé par  $2u$  & à  $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$  divisé par  $2u$  ou

par  $2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ .



$$2^{\circ}. \frac{adx + 2x dx}{adx + 2x dx} \text{ divisé par } 2u = \frac{2 \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}{2 \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}.$$

$$3^{\circ}. \frac{ayydx + 2axydy}{2 \sqrt{a^4 + axyy}} \text{ divisé par } 2u \text{ est égal, par les} \\ \text{règles de la division des fractions à } \frac{ayydx + 2axydy}{2 \sqrt{a^4 + axyy} \times 2u} \\ = \frac{ayydx + 2axydy}{2 \sqrt{a^4 + axyy} \times 2 \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}; \\ \text{donc } du = \frac{adx + 2x dx}{2 \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \\ \frac{ayydx + 2axydy}{2 \sqrt{a^4 + axyy} \times 2 \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}; \text{ dont} \\ \text{le problème à été résolu.}$$

*Corollaire.* La différence que M. le Marquis de l'Hôpital assigne à la fraction  $\frac{\sqrt[3]{ax + xx}}{\sqrt{xy + yy}}$ , ne paroîtra pas embrouillée à ceux qui se rappelleront ce qui suit.

$$1^{\circ}. \text{ La différence du numérateur } \sqrt[3]{ax + xx} \text{ est } \frac{adx + 2x dx}{3 \sqrt[3]{ax + xx^2}} \text{ (Cor. II. de la question 9).}$$

$$2^{\circ}. \text{ La différence de } \sqrt{xy + yy} \text{ est } \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2 \sqrt{xy + yy}} \text{ (question 9).}$$

$$3^{\circ}. \text{ Le quarré de } \sqrt{xy + yy} \text{ est } xy + yy.$$

4<sup>o</sup>. La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par

par le dénominateur, — au produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur (*Note 3*) ; donc la différence de la fraction proposée est égale à la différence du numérateur  $\sqrt[3]{ax + xx}$  multipliée par le dénominateur  $\sqrt{xy + yy}$  ; — à la différence du dénominateur  $\sqrt{xy + yy}$  multipliée par le numérateur  $\sqrt[3]{ax + xx}$  ; le tout divisé par  $xy + yy$ , quarré du dénominateur  $\sqrt{xy + yy}$  ; donc la fraction proposée n'a pas d'autre différence que celle que lui a assignée M. le Marquis de l'Hôpital à la fin de l'article 7. pag. 12.

## NOTE V.

DANS toute la Section seconde M. le Marquis de l'Hôpital se sert du calcul différentiel pour trouver les tangentes de toutes sortes de lignes courbes. Il suppose que le Lecteur a étudié avec attention tout ce qui regarde les sections coniques ; nous le supposons aussi. Malgré cela, cependant nous allons lui rappeler en peu de mots les principales propriétés du Cercle, de la Parabole, de l'Ellipse & de l'Hyperbole. Cette espèce d'abrégé du Traité des sections coniques est absolument nécessaire pour rendre intelligible la plupart des problèmes & des exemples que contient cette seconde section :

1°. Si l'on coupe le cône  $ABC$ , *Fig. 158. Pl. 8*, parallèlement à sa base circulaire  $AIKC$ ,

§

& plus haut ou plus bas à volonté ; l'on aura un cercle LTH , d'autant plus grand ou d'autant plus petit , que la section sera faite plus près ou plus loin de la base du cone. La propriété de cette courbe est que le quarré d'une ordonnée quelconque DF , *Fig. 159. Pl. 8* , est toujours égal au produit des coupées ou abscisses correspondantes AF , FB. Nommons donc DF  $y$  , AB  $2a$  , AF  $x$  ; l'on aura AC ou CB  $a$  , FB  $= 2a - x$  ; & l'équation sera  $DF^2 = AF \times FB$  , ou  $yy = 2ax - xx$  ; c'est là l'équation au cercle , en prenant le sommet A pour l'origine des  $x$  ou des abscisses. Si l'on prenoit le centre C pour l'origine des abscisses , c'est-à-dire , si l'on faisoit CF  $= x$  ; l'on auroit AF  $= a - x$  , FB  $= a + x$  ; & l'équation précédente se changeroit en celle-ci ,  $yy = aa - xx$ .

2<sup>o</sup>. Si l'on coupe le cone ABC , *Fig. 158. Pl. 8* , obliquement à sa base & parallèlement à un de ses côtés AB ; l'on aura la parabole IGK. Une parabole quelconque MSm , *Fig. 160. Pl. 8* , a pour sommet le point S ; pour foyer , le point F ; pour grand axe , SP ; pour ordonnées au grand axe , les lignes PM , FN ,  $pR$  ; pour coupées ou abscisses correspondantes , les lignes SP , SF ,  $Sp$  ; pour paramètre , une ligne quelconque égale à la double ordonnée Nn qui passe par le foyer F. La propriété de cette courbe , c'est que le quarré d'une ordonnée est égal au produit de l'abscisse correspondante & du paramètre ; ainsi  $PM^2 = SP \times Nn$ . Nommons donc  $y$  une ordonnée quel-

conque ; nommons  $x$  son abscisse correspondante, &  $p$  le paramètre ; l'on aura pour équation à la parabole  $yy = px$ .

3°. L'on a dans la parabole  $MSm$  l'équation  $PM^2 = PS \times Nn$  ; l'on a encore dans la même parabole  $pR^2 = pS \times Nn$  ; donc l'on aura  $PM^2 : pR^2 :: PS \times Nn : pS \times Nn$  ; mais le paramètre  $nN$  est une quantité constante ; donc l'on aura  $PM^2 : pR^2 :: PS : pS$  ; donc dans une parabole quelconque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme leurs abscisses.

4°. L'on a dans la parabole  $yy = px$  ; donc si  $p = 1$ , l'équation deviendra  $yy = 1x = x$ .

5°. L'on a dans la parabole  $yy = px$  ; donc  $x$  croissant,  $y$  doit croître aussi, parce que  $p$  est une quantité invariable. Mais les  $x$  peuvent croître à l'infini, parce que le grand axe de la parabole peut être prolongé à l'infini ; donc les  $y$  peuvent croître à l'infini ; donc la parabole ira toujours en augmentant, & ne se fermera jamais.

6°. Si l'on coupe le cone  $ABC$ , *Fig. 158. Pl. 8*, obliquement à sa base & à ses deux côtés, de manière que la section coupe les deux côtés du cone ; l'on aura une ellipse  $DMN$ . Une ellipse quelconque, *par exemple*, l'ellipse  $ABED$ , *Fig. 161. Pl. 8*, a pour grand axe,  $AB$  ; pour petit axe,  $ED$  ; pour foyer,  $F, f$  ; pour centre de figure,  $C$  ; pour ordonnée,  $PM, pm$  ; pour abscisses correspondantes à l'ordonnée  $PM$ , les lignes  $AP, PB$  ; pour abscisses correspondantes à  $pm$ , les lignes  $Ap, pB$  ; pour paramètre du grand axe, la double

ordonnée  $Nn$  qui passe par le foyer  $F$ . Dans cette espèce de courbe, l'on a toujours la proportion suivante, le carré d'une ordonnée quelconque est au produit de ses abscisses correspondantes, comme le paramètre est au grand axe, ou  $PM' : AP \times PB :: Nn : AB$ . Nommons donc  $AB$ ,  $2a$ ;  $ED$ ,  $2b$ ;  $Nn$ ,  $p$ ;  $PM$ ,  $y$ ;  $AP$ ,  $x$ ; l'on aura  $PB = 2a - x$ , & la proportion précédente se changera en celle-ci,  $yy : 2ax - xx :: p : 2a$ ; donc  $2ayy = 2apx - pxx$ ; donc  $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$ ;

donc  $yy = px - \frac{pxx}{2a}$ ; & c'est-là l'équation au paramètre de l'ellipse; en prenant l'un des sommets  $A$  pour l'origine des abscisses.

7°. Si l'on avoit pris l'origine des abscisses au centre  $C$ , *c'est-à-dire*, si l'on avoit  $CP = x$ , l'on auroit eu  $AP = a - x$ , &  $PB = a + x$ . La proportion précédente se seroit donc changée en celle-ci;  $yy : aa - xx :: p : 2a$ ; donc  $2ayy = aap - pxx$ ; donc  $yy = \frac{aap - pxx}{2a}$ ; donc  $yy = \frac{1}{2} ap - \frac{pxx}{2a}$ ; & c'est-là l'équation au paramètre de l'ellipse, en prenant les abscisses depuis le centre  $C$ .

8°.  $2ayy = aap - pxx$ ; donc  $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$ ; donc  $x$  augmentant, le second membre  $aa - xx$  doit diminuer. Le second membre ne peut pas diminuer, sans que le premier membre  $\frac{2ayy}{p}$  diminue. Mais dans ce premier membre, il n'y a que  $y$

qui puisse diminuer, parce que le grand axe  $2a$  & le paramètre  $p$  sont des quantités constantes; donc dans l'ellipse  $x$  augmentant,  $y$  doit diminuer. Mais  $x$  ne peut augmenter que jusqu'à un certain point, parce que le grand axe de cette courbe est déterminé; donc l'ellipse se fermera dans les deux points où les  $x$  ne seront plus susceptibles d'augmentation; donc elle se fermera aux deux sommets  $A$  &  $B$ .

9°. L'on a dans l'ellipse  $PM^2 : AP \times PB :: Nn : AB$ ; l'on a encore  $pm^2 : Ap \times pB :: Nn : AB$  (*num. 6*); donc l'on aura  $PM^2 : AP \times PB :: pm^2 : Ap \times pB$ ; donc  $PM^2 : pm^2 :: AP \times PB : Ap \times pB$ ; donc dans l'ellipse les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes.

10°. Il est encore démontré dans tous les Traités des Sections coniques, que dans toute ellipse le quarré d'une ordonnée quelconque est au produit des abscisses correspondantes, comme le quarré du demi-petit axe est au quarré du demi-grand axe; donc l'on aura, en prenant l'origine des abscisses à l'un des sommets, la proportion suivante;  $yy : 2ax - xx :: bb : aa$ ; donc  $aayy = 2abbx - bbxx$ ; donc  $yy = \frac{2abbx - bbxx}{aa}$ ; donc  $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$ ; & c'est-là l'équation aux axes de l'ellipse, en prenant l'origine des abscisses à l'un des sommets.

11°. Dans toute ellipse le quarré d'une ordonnée quelconque est au produit des abscisses corres-

pondantes, comme le quarré du demi-petit axe est au quarré du demi-grand axe ; donc, en prenant l'origine des abscisses au centre C, l'on aura  $xy : aa - xx :: bb : aa$  ; donc  $aayy = aabb - bbxx$  ; donc  $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$  ; donc  $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$  ; & c'est-là l'équation aux axes de l'ellipse, en prenant le centre de la courbe pour l'origine des abscisses.

12°. Il est enfin démontré dans tous les *Traité des Sections coniques* que dans une ellipse quelconque le grand axe est au petit axe, comme le petit axe est au paramètre.

13°. Si l'on coupe le cone ABC, (*Fig. 158. Pl. 8*), obliquement à sa base, & aux deux côtés du cone, de manière que la Section prolongée en haut, aille couper un des côtés AB, aussi prolongé ; l'on aura l'hyperbole FHE, dont le grand axe sera HR, à l'extrémité duquel on pourra former une seconde hyperbole égale à celle dont nous venons de parler, afin d'avoir deux hyperboles opposées sur un même axe HR. L'hyperbole  $nAM$ , (*Fig. 162. Pl. 8*), a pour axe principal, AB ; pour petit axe, DE ; pour foyers, F, f, pour centre commun aux deux hyperboles opposées, le point C ; pour ordonnée, PM, à laquelle correspondent les abscisses AP, BP ; pour paramètre du grand axe, la double ordonnée Nn qui passe par le foyer F. Faisons donc  $AB = 2a$ , AC ou CB  $= a$ , DE  $= 2b$ , DC ou CE  $= b$ , Nn  $= p$ , PM  $= y$ , AP  $= x$ , l'on aura BP  $= 2a + x$ . Dans

cette espèce de courbe l'on a toujours la proportion suivante, le carré d'une ordonnée quelconque est au produit des abscisses correspondantes, comme le paramètre est à l'axe principal ; donc  $PM^2 : AP \times BP :: Nn : AB$  ; donc  $yy : 2ax + xx :: p : 2a$  ; donc  $2ayy = 2apx + pxx$  ; donc  $yy = \frac{2apx + pxx}{2a}$  ; donc  $yy = px + \frac{p^2x^2}{2a}$  ; & c'est-là l'équation au paramètre de l'hyperbole, en comptant les abscisses depuis le sommet.

14°. A quelques signes près, l'équation est la même pour l'ellipse & pour l'hyperbole. En effet, l'équation commune à ces deux courbes est  $yy = px \mp \frac{p^2x^2}{2a}$ . Dans les doubles signes le supérieur est pour l'ellipse, & l'inférieur pour l'hyperbole.

15°. En comptant les abscisses depuis le centre C, c'est-à-dire, en nommant CP,  $x$  ; l'on aura  $AP = x - a$ , &  $BP = x + a$ . Dans cette hypothèse le produit des abscisses correspondantes sera  $xx - aa$  ; & la proportion de num. 13. se changera en celle-ci,  $yy : xx - aa :: p : 2a$  ; donc  $2ayy = pxx - aap$  : donc  $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$  ; & c'est-là l'équation au paramètre de l'hyperbole, en comptant les abscisses depuis le centre C.

16°. A cause des quantités constantes  $2a$  &  $p$ , les carrés des ordonnées PM,  $pm$  sont entr'eux comme les produits de leurs abscisses correspondantes. Le calcul est le même que celui que nous avons fait pour l'ellipse, num. 9.



17°. L'hyperbole va toujours en s'élargissant, & elle ne doit jamais se fermer. En effet, dans l'équation  $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$ ,  $x$  augmentant,  $y$  doit aussi augmenter, parce que les quantités représentées par  $a$  & par  $p$  sont des quantités invariables. Mais  $x$  peut augmenter à l'infini, parce qu'on peut prolonger AP à l'infini; donc  $y$  peut augmenter à l'infini; donc les ordonnées à l'hyperbole représentées par  $y$ , vont toujours en augmentant à mesure qu'elles s'éloignent du sommet A; donc l'hyperbole va toujours en s'élargissant; donc elle ne doit jamais se fermer.

18°. Dans l'hyperbole équilatère  $2a = p$ ; donc l'équation générale  $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$  se réduit pour l'hyperbole équilatère à  $yy = xx - aa$ ; ce qui donne  $x - a : y :: y : x + a$ ; donc dans cette espèce de courbe l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre les abscisses correspondantes.

19°. Dans l'hyperbole comme dans l'ellipse,  $2a : 2b :: 2b : p$ , c'est-à-dire, le paramètre est une troisième proportionnelle au grand & au petit axe.

20°. Les lignes Qq, Gg, (Fig. 162, Pl. 8.) qui se coupent au centre C, & dont la première est parallèle à la ligne AE, & la seconde à la ligne AD, sont les asymptotes des deux hyperboles opposées nAM, mMB. Il est démontré dans tous les Traités des Sections coniques que le rectangle sous l'ordonnée hn & l'abscisse Ch est égal au carré de AH. Faisons donc  $hn = y$ ,  $Ch = x$ , &  $AH = a$ ;

nous aurons  $xy = aa$ , & c'est-là l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

21°. Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent doit s'entendre des Sections coniques ordinaires, c'est-à-dire, des Sections coniques tirées d'un cône qui a pour base un cercle ordinaire. L'on trouvera *num.* 1. ce qu'il faut entendre par cercle ordinaire.

22°. Les Sections coniques d'un genre supérieur sont tirées d'un cône qui a pour base un cercle d'un genre supérieur, c'est-à-dire, une courbe dont les ordonnées & les abscisses fournissent une équation d'un plus haut degré que celle que donnent les ordonnées & les abscisses d'un cercle ordinaire.

23°. Supposons que le cône ABC, (*Fig.* 158. *Pl.* 8), ait pour base une courbe dans laquelle le cube de PQ soit égal au produit du quarré de A Q multiplié par QC; ce cône donnera les Sections suivantes.

La parabole qui en sera tirée, aura pour équation  $y^3 = p^1 x^2$ .

L'ellipse tirée de ce même cône aura pour équation  $y^3 = px^2 - \frac{px^3}{2a}$ , ou  $2ay^3 = 2apx^2 - px^3$ ; ce qui se réduit à la proportion suivante,  $y^3 : x^2 \times (2a - x^1) :: p : 2a$ .

L'équation à l'hyperbole tirée de ce même cône sera  $y^3 = px^2 + \frac{px^3}{2a}$ , ou  $2ay^3 = 2apx^2 + px^3$ ; ce qui donne la proportion suivante,  $y^3 : x^2 \times (2a + x^1) :: p : 2a$ .

24°. L'équation à la parabole cubique étant  $y^3 = p'x^3$ , elle sera par là même  $y^{1+2} = p'x^3$ , & elle sera en général pour toute parabole d'un genre supérieur  $y^{m+n} = p^m x^n$ . De même l'équation du num. 23. se changera, pour l'ellipse & pour l'hyperbole, en l'équation générale  $y^{m+n} = px^n + \frac{px^{m+n}}{2a}$ .

25°. Il faut donc que dans l'équation générale applicable aux ellipses & aux hyperboles d'un genre supérieur, l'exposant de  $y$  soit égal à la somme des exposants des deux abscisses correspondantes à l'ordonnée  $y$ . Il faut encore que dans l'équation générale applicable à une parabole quelconque d'un genre supérieur, l'exposant de  $y$  soit égal à la somme des exposants de l'abscisse correspondante & du paramètre. Aussi l'équation  $y^3 = p^2 x^3$  est-elle autant l'équation à une parabole cubique que  $y^3 = p'x^3$ ; parce que l'une & l'autre donnent l'équation générale  $y^{m+n} = p^m x^n$ .

26°. Tout ce que nous avons avancé dans cette *Note*, est développé & démontré dans tout *Traité des Sections coniques*. On peut consulter celui que nous avons donné dans la troisième édition de notre petit *Dictionnaire de Physique* en 2 volumes in-8°, imprimé à Avignon chez la Veuve GIRARD en l'année 1767. On peut encore consulter le *Traité des Sections coniques* de l'Abbé de la Caille, & le *Commentaire* que nous avons donné de ce *Traité* dans notre *Guide des jeunes Mathématiciens*, imprimé à Avignon chez la même Veuve GIRARD en l'année 1765.

## NOTE VI.

LES deux questions suivantes jetteront un grand jour sur l'article 9, page 14.

*Première Question.* Comment peut-on démontrer que les triangles  $mRM$ ,  $MPT$ , (*Fig. 3. Pl. 1.*) sont semblables ?

*Réponse.* Les deux triangles  $mRM$ ,  $MPT$  ont d'abord un angle droit chacun, l'un en  $R$ , l'autre en  $P$ . Ils ont ensuite l'angle  $T$  égal à l'angle  $M$ , parce que le côté infiniment petit  $Mm$  étant confondu avec la ligne  $MT$  prolongée, & cette ligne coupant les deux parallèles  $TP$ ,  $MR$ ; il est impossible que l'angle extérieur  $M$  ne soit pas égal à l'angle intérieur  $T$ ; donc les deux triangles  $mRM$ ,  $MPT$  sont équiangles; donc ils sont semblables; donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels.

*Seconde Question.* Comment la connoissance de la soutangente  $PT$ , (*Fig. 3. Pl. 1.*), peut-elle conduire à la connoissance de la tangente  $MT$ .

*Réponse.* En connoissant la longueur de la soutangente  $PT$ , l'on a le point  $T$  auquel doit aboutir la tangente demandée. Le point  $M$  d'où cette tangente doit partir, est donné de position; donc en connoissant la longueur de la soutangente  $PT$ , l'on a les deux points extrêmes de la tangente  $MT$ ; donc la connoissance de la soutangente  $PT$  conduit nécessairement à la connoissance de la tangente  $MT$ , parce que d'un point quelconque à un point quelconque on peut toujours tirer une ligne droite. Pour trouver donc facilement une tangen-

te quelconque  $MT$ , il ne s'agit que de sçavoir manier la formule générale  $\frac{ydx}{dy} = PT$ , en différenciant l'équation de la courbe à laquelle on veut tirer une tangente.

## NOTE VII.

L'on apprend dans l'article 11, pag. 15. à tirer des tangentes à des paraboles & à des hyperboles de tous les genres. Il s'agit d'abord de tirer une tangente à une courbe dont l'équation est  $ax = yy$ . Cette courbe est évidemment (Note 5. num. 2.) une parabole ordinaire dont  $y$  est une ordonnée quelconque,  $x$  l'abscisse correspondante, &  $a$  le paramètre. En différenciant l'équation  $ax = yy$ , l'on trouve tout de suite que dans cette courbe  $dx = \frac{2ydy}{a}$ . La soutangente  $PT$  est dans toutes les courbes égale à  $\frac{ydx}{dy}$ . Mais dans la parabole ordinaire  $dx = \frac{2ydy}{a}$ ; donc dans la parabole ordinaire l'on aura  $PT = \frac{2yydy}{ady} = \frac{2yy}{a}$ . Dans cette même parabole l'on a  $yy = ax$ ; donc  $\frac{2yy}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$ ; donc dans la parabole ordinaire la soutangente  $PT = 2x = 2AP$ , (Fig. 3. Pl. 1); c'est-là le num. 1. de l'article 11.

Le num. 2. du même article apprend à tirer une tangente à une courbe dont l'équation est  $aa = xy$ . C'est-là (Note 5, num. 20.) l'équation de l'hy-

perbole ordinaire rapportée à ses asymptotes. Cette équation différenciée devient, à cause de la constante  $a$ ,  $ydx + xdy = 0$ ; donc  $ydx = -x dy$ ;

donc  $dx = -\frac{x dy}{y}$ . La soutangente PT est dans

toutes les courbes égale à  $\frac{y dx}{dy}$ ; donc l'on aura

dans l'hyperbole ordinaire  $PT = -\frac{x y dy}{y dy} =$   
 $-x$ ; donc en prenant  $PT = PA$ , (*Fig. 4. Pl. 1*),

& en plaçant PT du côté opposé au point A, l'on aura la longueur de la soutangente à laquelle répond la tangente MT. Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que le point A est le point d'intersection des deux asymptotes de l'hyperbole représentée par la figure 4 de la planche 1. Il est encore moins nécessaire de faire remarquer que les Géomètres sont convenus de désigner les positions opposées des lignes par les signes + & —. Si  $PT = +x$ , lorsque le point T est au dessus du point A, c'est-à-dire, au dessus du point de l'origine des  $x$ ; l'on aura  $PT = -x$ , lorsque le point T sera au dessous du point A. Ce sont là des connoissances que l'on doit supposer dans tout homme qui entreprend de lire un Traité aussi difficile que celui des *Infiniment Petits*.

Le num. 3 de l'article 11. demande un long Commentaire. Pour le rendre plus clair, nous allons le renfermer dans les réponses aux questions suivantes.

*Première Question.* De quelle espèce de parabole parle-t-on au num. 3 de l'article 11.

*Réponse.* M. le Marquis de l'Hôpital parle , au num. 3. de l'article 11 , des paraboles d'un genre supérieur , puisqu'il a parlé des paraboles ordinaires , au num. 1 du même article.

*Seconde Question.* Pourquoi , dans l'équation générale  $y^m = x$  , M. le Marquis de l'Hôpital ne fait-il pas mention du paramètre de la courbe ?

*Réponse.* Parce qu'il suppose ce paramètre  $= 1$ . Or  $1x = x$  : & comme toutes les puissances de 1 donnent 1 ; si  $p = 1$  , l'on aura  $px = x$  ,  $p^2x = x$  ,  $p^3x = x$  &c.

*Troisième Question.* Comment l'équation générale  $y^m = x$  peut-elle convenir aux paraboles d'un genre supérieur , puisque nous avons assuré ( num. 24 & 25 de la Note 5. ) que ces courbes avoient pour équation générale  $y^{m+n} = p^m x^n$  , où  $y^{m+n} = p^n x^m$ .

*Réponse.* 1°. Nous verrons dans la réponse à la question 5<sup>e</sup>. , que lorsque l'exposant  $m$  est un nombre fractionnaire positif plus grand que l'unité , l'équation  $y^m = x$  équivaut à l'équation générale  $y^{m+n} = p^m x^n$ .

2°. L'équation  $y^m = x$  équivaudra à l'équation  $y^{m+n} = p^n x^m$  , si l'on suppose que l'exposant  $m$  que donne à  $y$  M. Le Marquis de l'Hôpital , est égal à l'exposant de  $x$  qui est 1 , + à l'exposant du paramètre qui multiplie  $x$ . En effet , supposons  $m = 3$  ; l'équation  $y^m = x$  deviendra  $y^3 = 1^2 x^1$  , c'est-à-dire , le cube d'une ordonnée quelconque est égal au produit de l'abscisse correspondante par le quarré du paramètre égal

à l'unité ; ce qui est en effet l'équation à une espèce de paraboles cubiques.

*Quatrième Question.* La valeur générale de la soutangente PT étant  $\frac{ydx}{dy}$ , comment peut-il se faire que PT devienne  $= mx$  dans les courbes dont l'équation est  $y^m = x$ .

*Réponse.* Le calcul suivant va servir de solution à cette question.  $y^m = x$ , donc la différence de  $y^m$  sera égale à la différence de  $x$ , donc  $my^{m-1} dy = dx$ ; donc en faisant entrer la nouvelle valeur de  $dx$  dans la formule générale  $\frac{ydx}{dy}$ , l'on aura  $PT = \frac{y \times my^{m-1} dy}{dy} = my^m$ . Mais  $y^m = x$ , par hypothèse, donc  $my^m = mx$ ; donc  $PT = mx$ .

*Cinquième Question.* Comment l'équation  $y^{\frac{2}{3}} = x$ , peut-elle devenir  $y^3 = axx$ ?

*Réponse.* Elle le devient par le calcul suivant.  $y^{\frac{2}{3}} = x$ , donc  $\sqrt[3]{y^2} = x$  (Note 4<sup>e</sup>. question 2.) donc  $y^3 = xx$ ; donc  $y^3 = 1xx$ ; donc, en faisant le paramètre  $1 = a$ , l'on aura  $y^3 = axx$ ; donc  $y^{1+2} = a^1 x^2$ ; donc  $y^{m+n} = a^m x^n$ .

L'on trouvera par la même méthode que  $y^{\frac{4}{3}} = x$ , devient  $y^4 = axxx$ . En effet,  $y^{\frac{4}{3}} = x$ , donc  $\sqrt[3]{y^4} = x$ , donc  $y^4 = xxx$ ; donc  $y^4 = 1xxx$ , donc  $y^4 = axxx$ , donc  $y^{1+3} = a^1 x^3$ , donc  $y^{m+n} = a^m x^n$ , donc nous avons eu raison d'af-



surer dans la réponse à la troisième question, que lorsque l'exposant  $m$  est un nombre fractionnaire positif plus grand que l'unité, l'équation  $y^m = x$  équivaut à l'équation générale  $y^{m+a} = p^m x^a$ .

*Sixième Question.* Comment peut-on prouver que  $y^{-2} = x$  donne l'équation  $a^3 = xy$ , laquelle équation convient à l'hyperbole cubique rapportée à ses asymptotes ?

*Réponse.* 1°. Il faut se rappeler que  $aa = xy$  est l'équation à l'hyperbole ordinaire rapportée à ses asymptotes (Note 5<sup>e</sup>. num. 20.)

2°.  $y^{-2} = x$ , donc  $\frac{1}{y^2} = x$  (Note 4<sup>e</sup>. question 1.) donc  $1 = xy$ ; mais dans le cas présent  $1 = a^3$ , puisqu'on ne peut pas avoir  $aa = xy$ , sans avoir  $a^3 = xy$ , donc  $y^{-2} = x$  équivaut à  $xy = a^3$ .

*Septième Question.* D'où est tirée la proportion  $dx : dy :: my^{m-1} : 1$  ?

*Réponse.* Cette proportion est tirée de l'équation  $my^{m-1} dy = dx$ . En effet, vous aurez cette équation, en multipliant d'un côté les extrêmes, de l'autre les moyennes de la proportion donnée.

*Huitième Question.* Pourquoi, en supposant  $y = 0$ , la raison de  $dy$  à  $dx$  est-elle infiniment grande, lorsque  $m$  surpasse 1 ?

*Réponse.* Lorsque  $m$  surpasse 1, l'exposant  $m - 1$  est un exposant positif. Si  $y = 0$ , & que  $m - 1$  soit un exposant positif, le terme  $my^{m-1}$  devient 0; donc la proportion  $dx : dy :: my^{m-1} : 1$  devient  $dx : dy :: 0 : 1$ , ou  $dy : dx :: 1 : 0$ .

Mais

Mais 1 est infiniment plus grand que 0, donc  $dy$  est infiniment plus grand que  $dx$ ; donc, en supposant  $y = 0$ , la raison de  $dy$  à  $dx$  est infiniment grande, lorsque  $m$  surpasse 1.

*Neuvième Question.* Pourquoi, en supposant  $y = 0$ , la raison de  $dy$  à  $dx$  est-elle infiniment petite, lorsque  $m$  est moindre que 1?

*Réponse.* Lorsque  $m$  est moindre que 1, l'exposant  $m - 1$  est un exposant négatif. Supposons  $m = \frac{1}{2}$ , l'exposant  $m - 1$  sera  $-\frac{1}{2}$ , & le terme  $my^{m-1}$  se changera en  $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}}$  (Note 4<sup>e</sup>.

*quest. 1.*) Supposons maintenant  $y = 0$ , le terme  $\frac{1}{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}}$  sera  $\frac{1}{0}$ ; donc en supposant  $y = 0$ , &  $m$

moindre que 1, le terme  $my^{m-1}$  deviendra  $\frac{1}{0}$ ,

& la proportion  $dx : dy :: my^{m-1} : 1$  se changera en celle-ci  $dx : dy :: \frac{1}{0} : 1$ , ou  $dy : dx :: 1 : \frac{1}{0}$ .

Mais 1 est infiniment plus petit que  $\frac{1}{0}$ ; parce que 0 est contenu une infinité de fois dans 1; donc, en supposant  $y = 0$ , la raison de  $dy$  à  $dx$  est infiniment petite, lorsque  $m$  est moindre que 1.

#### NOTE VIII.

LA formule générale  $P T = \frac{y dx}{dy}$  s'applique dans l'article 12, pag. 17, à des ellipses de tous les genres. La première ellipse à laquelle on l'applique, est une ellipse ordinaire (Note 5. num. 6), puisqu'on suppose que la courbe A M B, (Fig. 5.

T

Pl. 1), est telle que le rectangle sous les abscisses AP, PB est au carré de l'ordonnée PM, comme le grand axe AB est au paramètre AD; ce qui donne l'équation  $\frac{ayy}{b} = ax - xx$ , en faisant le grand axe  $AB = a$ , & le paramètre  $AD = b$ . Cette équation différenciée devient  $\frac{2aydy}{b} = adx$

—  $2xdx$ ; donc  $dx = \frac{2aydy}{ab - 2bx}$ . Mettons cette nouvelle valeur de  $dx$  dans la formule générale

$PT = \frac{ydx}{dy}$ , l'on trouvera  $PT = \frac{2ayydy}{ab - 2bx \times dy} = \frac{2ayy}{ab - 2bx}$ . Mais l'équation de l'ellipse AMB donne

$\frac{ayy}{b} = ax - xx$ ; donc  $\frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$ ;

donc  $PT = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$ . Mais  $AT = PT - AP =$

$\frac{2ax - 2xx}{a - 2x} - x = \frac{2ax - 2xx - ax + 2xx}{a - 2x} = \frac{ax}{a - 2x}$ ;

donc  $AT = \frac{AB \times AP}{AB - 2AP}$ .

L'on apprend ensuite dans le même *article* 12 à tirer une tangente à une ellipse d'un genre supérieur. L'ellipse qu'on suppose est telle, que le cube de  $AP \times$  le carré de  $PB$  est à la cinquième puissance de  $PM$ , comme le diamètre  $AB$  est au paramètre  $AD$ ; ce qui donne l'équation  $\frac{ay^5}{b}$

$= x^3 \times \frac{1}{a - x^2}$ , ou  $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \frac{1}{aa - 2ax + xx}$ ,

ou enfin  $\frac{ay^5}{b} = aax^3 - 2ax^4 + x^5$ . Cette équation

différentiée devient  $\frac{5ay^4 dy}{b} = 3aaxxdx - 8ax^3 dx$

+  $5x^4 dx$ ; donc  $dx = \frac{5ay^4 dy}{3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4}$ . Fai-

sons entrer la nouvelle valeur de  $dx$  dans la formule générale  $PT = \frac{ydx}{dy}$ ; nous aurons

$$\frac{5ay^5 dy}{(3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4) \times dy} = \frac{5ay^5}{3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4}$$

=  $PT$ . Mais  $\frac{ay^5}{b} = aax^3 - 2ax^4 + x^5$ ; donc en

substituant cette nouvelle valeur, l'on aura  $PT$

$$= \frac{5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5}{3aax^2 - 8ax^3 + 5x^4}; \text{ \& en divisant le numé-}$$

rateur \& le dénominateur de cette dernière frac-

$$tion par  $axx - x^3$ , l'on aura pour quotient  $PT$$$

$$= \frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}. \text{ Mais } AT = PT - AP = \frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$$

$$- x = \frac{5ax - 5xx - 3ax + 5xx}{3a - 5x} = \frac{2ax}{3a - 5x};$$

donc dans l'ellipse dont il s'agit, l'on aura  $AT$

$$= \frac{2AB \times AP}{3AB - 5AP}.$$

L'on pourroit demander ici de prouver que le numérateur  $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$  divisé par  $axx - x^3$  donne pour quotient  $5ax - 5xx$ . La preuve se présente d'elle-même. Multipliez le diviseur  $axx - x^3$  par  $5ax - 5xx$ , vous aurez pour produit le dividende  $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$ ; donc le numérateur  $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$  divisé par  $axx - x^3$  donne pour quotient  $5ax - 5xx$ .



ce qui a donné  $m$  pour quotient. La seconde quantité de cette même partie a été divisée par  $a - x^{n-1}$ ; ce qui a donné pour quotient, comme ci-dessus,  $a - x$ . Aussi le quotient total de cette première partie est-il  $m \times a - x = m a - x$ .

La seconde partie du dénominateur en question est  $-n a - x^{n-1} \times x^m$ . L'on a divisé  $-n a - x^{n-1}$  par  $a - x^{n-1}$ , & l'on a eu pour quotient  $-n$ . L'on a ensuite divisé  $x^m$  par  $x^{m-1}$ , & l'on a eu, comme ci-dessus, pour quotient  $x^1 = x$ . Aussi le quotient total de cette seconde partie est-il  $-n \times x = -nx$ .

3°. Si  $PT = \frac{m + nx \times a - x}{ma - x - nx}$ ; l'on aura évidemment

$$PT = \frac{m + n \times ax - xx}{ma - mx - nx} = \frac{m + n \times ax - xx}{ma - m - nx}$$

Seconde Question. Comment a-t-on trouvé AT

$$= \frac{nax}{ma - m - nx} ?$$

$$\text{Réponse. } AT = PT - AP = \frac{m + n \times ax - xx}{ma - m - nx}$$

$$- x = \frac{m + n ax - m - n xx}{ma - m - nx} - x$$

$$= \frac{m + n ax - m - n xx - max + m + n xx}{ma - m - nx}$$

$$= \frac{nax}{ma - m - nx}; \text{ à cause des quantités qui se détruisent dans le numérateur.}$$

Corollaire. Toutes les opérations que nous venons de faire dans cette Note 8 prouvent qu'il est

plus facile de manier une équation qui a des chiffres pour *exposants*, que d'en manier une dont les exposants sont des lettres.

## NOTE IX.

L'ARTICLE 13, *pag.* 18 est pour l'hyperbole, ce que l'article précédent a été pour l'ellipse. Voici quelques remarques qui serviront à l'éclaircir.

1°. La lecture de la *Note* 5<sup>e</sup>, convaincra tout homme qui est au fait des Sections coniques, que l'équation  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x^n}$  est une équation générale à toute hyperbole dont on fait le grand axe AB, (*Fig. 6. Pl. 1*),  $= a$ , & le paramètre  $= b$ . Cette équation maniée comme celle de l'ellipse dont elle ne diffère que par les signes, sert à trouver les tangentes finies de l'hyperbole.

2°. L'asymptote est la tangente infinie de l'hyperbole, c'est-à-dire, la tangente d'une hyperbole qu'on suppose s'être élargie à l'infini. La ligne CE, *par exemple*, ne peut être regardée comme tangente de l'hyperbole AM, (*Fig. 6. Pl. 1*), qu'autant qu'on supposera infinies l'abscisse AP  $= x$ , & l'ordonnée PM  $= y$ . Dans cette hypothèse l'équation  $\frac{nax}{ma + \overline{m+nx}}$  devient d'abord  $\frac{nax}{m+nx}$ , parce que  $ma$  est infiniment petit vis-à-vis  $\overline{m+nx}$  (*Note 2, num. 4*). Mais  $\frac{nax}{m+nx} = \frac{n}{m+n} a$ ; donc dans cette hypothèse AT devient  $\frac{n}{m+n} a$ .

Mais en considérant CE comme tangente, AT devient AC; donc en considérant CE comme tangente, l'on aura  $AC = \frac{n}{m+n} a$ .

3°. Par la même raison l'équation générale  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x^n}$  deviendra, à cause du terme infiniment petit  $a$  vis-à-vis le terme infiniment grand  $x$ ,  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times x^n$ , ou  $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$  ou enfin  $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ .

4°. Si l'on fait  $m+n=p$ , l'on aura  $ay^p = bx^p$ .

5°. Si l'on extrait la racine  $p$  des deux membres de cette dernière équation, l'on aura  $\sqrt[p]{ay^p} = \sqrt[p]{bx^p}$  ou  $y \sqrt[p]{a} = x \sqrt[p]{b}$ ; donc  $dy \sqrt[p]{a} = dx \sqrt[p]{b}$ , parce que les constantes  $\sqrt[p]{a}$  &  $\sqrt[p]{b}$  n'ont point de différence; donc  $dx : dy :: \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$ .

6°. En supposant la ligne CE prolongée à l'infini, on concevra au point où l'asymptote CE rencontrera l'hyperbole AM, un triangle infiniment petit qui sera semblable au triangle CAE, c'est-à-dire, qui sera vis-à-vis le triangle CAE, ce que le triangle infiniment petit MR $m$ , (Fig. 3. Pl. 1), est vis-à-vis le triangle TPM. L'on pourra donc dire du triangle infiniment petit idéal MR $m$  & du triangle fini CAE, que ces deux triangles ont leurs côtés homologues proportionnels; donc MR :  $mR :: CA : AE$ ; donc  $dx : dy :: CA : AE$ . Mais (num. 5)  $dx : dy :: \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$ ;



donc  $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: CA : AE$ . Mais (num. 2)  $CA = \frac{n}{m+n} a = \frac{n}{p} a$ ; donc  $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: \frac{n}{p} a : AE$ ;  
donc  $AE = \frac{\frac{n}{p} a \times \sqrt[p]{b}}{\sqrt[p]{a}}$ ; donc  $AE = \frac{\frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^p}}{\sqrt[p]{a}}$ ;

donc  $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}}$ ; donc connoissant  $CA$ , il sera très facile de trouver  $AE$ , & de tirer par les points  $C$  &  $E$  l'asymptote  $CE$ .

7°. Dans l'hyperbole ordinaire où  $m = 1$  &  $n = 1$ , la formule  $AC = \frac{n}{m+n} a = \frac{n}{p} a$  devient  $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} AB$ , c'est-à-dire, l'asymptote doit partir du centre du grand axe  $AB$ .

8°. Dans l'hyperbole ordinaire, la formule  $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}} = \frac{n}{m+n} \sqrt[p]{ba^{m+n-1}}$  devient  $AE = \frac{1}{2} \sqrt[2]{ba^{1+1-1}} = \frac{1}{2} \sqrt{ba}$ .

9°. Dans l'hyperbole dont il s'agit ici, l'on a fait le grand axe  $= a$  & le paramètre  $= b$ ; donc le petit axe sera  $= \sqrt{ab}$ , parce que dans l'hyperbole le grand axe : au petit axe :: le petit axe : au paramètre (Note 5. num. 19); donc en faisant le petit axe  $= c$ , l'on aura  $a : c :: c : b$ ; donc  $cc = ab$ ; donc  $c = \sqrt{ab}$ ; donc si  $AE = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$ , il faudra que la ligne  $AE$  par l'extrémité de laquelle passera l'asymptote  $CE$ , soit égale à la moitié du petit axe de l'hyperbole donnée.

## NOTE X.

L'ON suppose dans l'article 14, pag. 19 une courbe quelconque AM, (Fig. 6. Pl. 1.) dont l'équation soit  $y^3 - x^3 = axy$ ; l'on apprend dans cet article à tirer à cette courbe des tangentes finies & infinies, les réponses aux questions suivantes le mettront à la portée de tout le monde.

*Première Question.* Comment a-t-on trouvé  $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$ .

*Réponse.* La différence de l'équation donnée étant  $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$ , l'on aura  $3yydy - axdy = 3xxdx + aydx$ ; donc  $dx = \frac{3yydy - axdy}{3xx + ay}$ . Mettons cette nouvelle valeur

de  $dx$  dans l'équation  $PT = \frac{ydx}{dy}$ , nous aurons  $PT = \frac{3y^3 dy - axydy}{3xx + ay \times dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$ .

*Seconde Question.* Comment a-t-on trouvé  $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$ ?

*Réponse.*  $AT = PT - AP = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay} - x = \frac{3y^3 - axy - 3xxx - axy}{3xx + ay} = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$ .

Mais  $3y^3 - 3x^3 = 3axy$ , puisque par hypothèse  $y^3 - x^3 = axy$ ; donc l'on aura  $\frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{3axy - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay} = AT$ . Voilà pour les tangentes finies.

Troisième Question. En faisant  $t = \frac{axy}{3xx + ay}$ ,

comment a-t-on trouvé  $y = \frac{3tx}{a}$  ?

Réponse. Le calcul suivant le fera toucher au doigt.  $t = \frac{axy}{3xx + ay}$  ; donc  $3txx + aty = axy$  ;

donc  $3txx = axy - aty$  ; donc  $y = \frac{3txx}{ax - at}$ . Mais en supposant  $x$  infini, l'on a  $ax - at = ax$  (Note 2, num. 4) ; donc dans cette hypothèse l'on aura  $y = \frac{3txx}{ax} = \frac{3tx}{a}$ .

Quatrième Question. Comment a-t-on trouvé  $A C = t = \frac{1}{3} a$  ?

Réponse. On l'a trouvé par le calcul suivant. Par hypothèse l'on a  $y^3 - x^3 = axy$ . Mais  $y = \frac{3tx}{a}$ , donc l'on aura  $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = \frac{3atxx}{a}$  ; donc  $\frac{27t^3x^3 - a^3x^3}{a^3} = 3txx$  ; donc  $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$  ; donc  $27t^3x^3 - 3a^3txx = a^3x^3$ . Mais à cause de l'infini du troisième ordre  $x^3$ , l'on aura  $27t^3x^3 - 3a^3txx = 27t^3x^3$  (Note 2. num. 4.) ; donc  $27t^3x^3 = a^3x^3$  ; donc  $3tx = ax$ , parce que les deux racines cubiques de deux cubes égaux sont égales ; donc  $3t = a$  ; donc  $t = \frac{a}{3} = \frac{1}{3} a$  ; donc le point d'où doit partir l'asymptote CE est trouvé, puisque AC doit être le tiers de la ligne donnée  $a$ .

Cinquieme Question. Comment a-t-on trouvé

$$AS = y - \frac{xdy}{dx}?$$

Réponse. Au point où l'asymptote CE, (Fig. 6. Pl. I), touchera la courbe. Imaginez, comme dans la Note précédente, num. 6, un triangle infiniment petit MRm dont les deux côtés  $dx$  &  $dy$  seront en proportion avec les deux côtés AT &

$$AS \text{ du triangle T A S. Mais } AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}; \text{ donc l'on pourra dire } dx : dy ::$$

$$\frac{ydx - xdy}{dy} : AS; \text{ donc } AS \times dx = \frac{ydx - xdy \times dy}{dy};$$

$$\text{donc } AS \times dx = ydx - xdy; \text{ donc } AS = \frac{ydx - xdy}{dx}$$

$$= y - \frac{xdy}{dx}.$$

Sixieme Question. Comment a-t-on trouvé AS

$$= s = \frac{axy}{3yy - ax}?$$

Réponse. 1°. L'on a trouvé (quest. 1. de cette note)  $3yydy - axdy = 3xxdx + aydx$ ; donc  $dy = \frac{3xxdx + aydx}{3yy - ax}$ .

2°.  $AS = y - \frac{xdy}{dx}$  (question précédente) donc

$$AS = y - \frac{x}{dx} \times dy = y - \frac{x}{dx} \times \frac{3xxdx + aydx}{3yy - ax}$$

$$= y - \frac{3x^3dx - axydx}{3yy - ax \times dx} = y - \frac{3x^3 - axy}{3yy - ax}$$

$$= \frac{3y^3 - axy - 3x^3 - axy}{3yy - ax} = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3yy - ax}.$$

3°. Par hypothèse,  $y^3 - x^3 = axy$ ; donc  $3y^3 - 3x^3 = 3axy$ ; donc si  $AS = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3yy - ax}$ ,

l'on aura  $AS = \frac{3axy - 2axy}{3yy - ax} = \frac{axy}{3yy - ax}$ ; donc

en faisant  $AS = s$ , l'on aura  $s = \frac{axy}{3yy - ax}$ .

Septieme Question. Comment a-t-on trouvé  $s = \frac{1}{3}a$ ?

Réponse. 1°.  $s = \frac{axy}{3yy - ax}$ ; donc  $3syy - asx = axy$ ; donc  $axy + asx = 3syy$ ; donc  $x = \frac{3syy}{ay + as}$ .

2°. En supposant  $y$  infini, l'on aura  $ay + as = ay$  (Note 2. num. 4.) donc  $x = \frac{3syy}{ay} = \frac{3sy}{a}$ .

3°. L'équation à la courbe en question est  $y^3 - x^3 = axy$ ; donc elle fera  $y^3 - \frac{27s^3y^3}{a^3} = 3syy$ ;

donc  $a^3y^3 - 27s^3y^3 = 3a^3syy$ ; donc  $a^3y^3 = 27s^3y^3 + 3a^3syy$ . Mais à côté de l'infini du troisieme ordre  $y^3$ , le terme  $3a^3syy$  devient nul (Note 2. num. 4); donc l'on aura  $27s^3y^3 = a^3y^3$ ; donc l'on aura par l'extraction de la racine cubique,  $3sy = ay$ ; donc

$3s = \frac{ay}{y}$ ; donc  $3s = a$ ; donc  $s = \frac{a}{3}$ ; donc  $s = \frac{1}{3}a$ ;

donc lorsque  $AS$  devient  $AE$ , l'on aura  $AE = \frac{1}{3}a$ ; donc en prenant les lignes  $AC$ ,  $AE$  égales chacune au tiers de la ligne donnée  $a$ , & en menant par les points  $C$  &  $E$  la ligne indéfinie  $CE$ , l'on aura l'asymptote de la courbe  $AM$ .

*Remarque.* C'est ainsi qu'il faut lire les autres propositions de ce Livre, si l'on veut en saisir toute la beauté & toute l'utilité. Dans les Notes suivantes nous nous occuperons moins à faire des calculs, qu'à donner une idée nette de certaines courbes dont M. le Marquis de l'Hôpital suppose que son Lecteur a une connoissance parfaite. Ces courbes sont la cycloïde, la spirale, la conchoïde, la cissoïde, la logarithmique, &c, &c. Par là nous rendrons un véritable service aux Commencans qui ne scauroient trop s'exercer à trouver, sans le secours d'autrui, la marche que notre incomparable Auteur a suivie, pour arriver à telle ou telle équation.

## NOTE XI.

**A**VANT que de lire l'article 15, pag. 21, il est nécessaire de se former une idée nette de la *Cycloïde* que l'on appelle quelquefois *Roulette*, & quelquefois *Trochoïde*. C'est une courbe produite par une entière révolution d'un globe ou d'un cercle sur une ligne droite. Imaginez-vous donc un cercle qui roule sur une ligne droite, *par exemple*, sur une ligne horizontale. Lorsque tous les points de sa circonférence se seront exactement appliqués sur cette ligne, il aura décrit une courbe à laquelle on a donné le nom de *Cycloïde*. Le P. Mersenne s'est aperçu le premier que le clou de l'une des roues d'une charète décrivait dans l'air une *Cycloïde*, parce qu'il étoit animé de deux mouvements simultanés, l'un en avant en ligne droite,

l'autre circulaire autour de l'essieu de la roue. Cette découverte fut faite en 1615. La *Figure 7* de la *Planche 1* représente une demi-cycloïde. Sa demi-circonférence  $CMA$  a été produite par la révolution de la demi-circonférence circulaire  $APB$  sur la ligne  $CB$ . Cette ligne  $CB$ , nécessairement égale à la demi-circonférence  $APB$ , s'appelle la *base* de la demi-cycloïde  $CMA$ . Elle a pour *axe* le diamètre  $AB$  du cercle *générateur*, c'est-à-dire, du cercle par la révolution duquel elle a été produite; pour *sommet*, le point  $A$ ; & pour *tangente* au point  $M$ , la ligne  $MT$  parallèle à la corde  $AP$ . Il est démontré que le contour de la cycloïde est quadruple du diamètre de son cercle générateur; l'on a donc la courbe  $CMA$  double du diamètre  $AB$ . Il est encore démontré que si d'un point quelconque  $M$  de la cycloïde  $CMA$ , on mène une ligne quelconque  $MPQ$  parallèle à la base  $CB$ , & qui coupe en un point quelconque  $P$  le cercle générateur  $APB$  décrit sur l'axe  $AB$ ; il est démontré, dis-je, que l'arc de cercle  $AP$  qui dans cette occasion prend le nom de *coupée*, est égal à la droite  $MP$  que l'on regarde comme l'*appliquée* correspondante de la *coupée* dont nous venons de parler. Il est enfin démontré que la corde  $AP$  de la *coupée*  $AP$  est parallèle à la ligne  $MT$  tangente au point  $M$  de la cycloïde  $CMA$ , & que cette même ligne  $MT$  a pour soutangente la ligne  $PT$  tangente du cercle au point  $P$ . Toutes ces vérités sont démontrées dans tous

les Traités complets de Méchanique, & nommément dans celui de M. l'Abbé de la Caille, pag. 180. art. 515 & suiv. Rien donc n'est plus facile que de trouver l'équation à la cycloïde. Nommons pour cela  $x$  la coupée AP,  $y$  l'appliquée MP,  $b$  la base CB, &  $a$  la demi-circonférence APB ; nous aurons  $x : y :: a : b$ , parce que  $x = y$ , &  $a = b$  ; donc  $bx = ay$  ; donc  $x = \frac{ay}{b}$  ; & c'est là l'équation à la cycloïde simple, dont il est question dans cette seconde proposition ; & en général dans toute cycloïde la circonférence du cercle générateur est à la base, comme la coupée est à l'appliquée.

## NOTE XII.

QUOIQ'IL ne s'agisse dans les articles 17 & 18, pag. 22 que de la cycloïde simple, il est bon cependant de sçavoir ce qu'il faut entendre par *cycloïde allongée*, & par *cycloïde accourcie*. Dans la première la base est plus longue, & dans la seconde elle est plus courte que la circonférence du cercle générateur. Voyez-en la formation physique dans l'endroit de la Méchanique de M. l'Abbé de la Caille que nous avons indiqué dans la Note précédente. Ce qu'il faut remarquer ici avec attention, c'est que dans la cycloïde simple l'on a nécessairement  $MP = PT$ , (Fig. 7, Pl. 1), parce que  $MP = y$ , & que  $PT = \frac{ay}{b}$  devient  $= y$  dans cette courbe, à cause de  $a = b$ . M. le Mar-



quis de l'Hôpital a donc raison de dire (*art.* 18) que dans la cycloïde simple le triangle MPT est isoscèle. Il a encore raison de dire que l'angle APQ, est mesuré par la moitié de l'arc AP, parce que si le cercle APB étoit fini, l'angle APQ insisteroit sur un arc de cercle égal à l'arc AP.

## NOTE XIII.

L'ARTICLE 21, page 25 présente deux difficultés. L'on dit 1°. que puisque PT est  $\frac{sydx}{xdy}$ , il

sera  $\frac{mst + nsty}{m\tau^n x^m - ns\tau^n x^m}$ . Cette valeur ne coutera presque rien à trouver, si l'on prend garde que l'équation  $m + ny^{m+n} - 1$   $dy = \frac{m\tau^n x^m - 1 dx - ns\tau^n x^m - 1 dx}{t}$

donne naturellement  $dx = \frac{mt + n\tau y^{m+n} - 1 dy}{m\tau^n x^m - 1 - ns\tau^n x^m - 1}$ .

L'on fera entrer cette valeur de  $dx$  dans  $\frac{sydx}{xdy}$ , & l'on trouvera à l'instant ce que l'on cherche.

La seconde difficulté que présente l'article 21 est beaucoup plus considérable. M. le Marquis de l'Hôpital y avance que si les courbes AQC, BCN, (*Fig.* 8, *Pl.* 1), devenoient des lignes droites, la courbe MC, seroit alors une des Sections coniques à l'infini. M. Varignon a rendu cette remarque sensible par les Figures 163 & 164 de la *Pl.* 8. sur lesquelles il faut continuellement avoir les yeux Soit, *dit-il*, un triangle quelconque rectiligne ECF, dont C soit le sommet, EF la base,

&amp;

& CE, FC les deux côtés, lesquels représentent les deux courbes AQC, BCN dont ils étoient auparavant les tangentes. Des points N d'un des côtés CF, pris & prolongé à discrétion, soient autant de NP parallèles à CD, lesquelles rencontrent la base EF en P, & l'autre côté en Q. Soit pris ensuite sur ces NP un point M, tel que l'on ait partout  $\overline{PQ}^m : \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n : \overline{PN}^n$ , je dis que la courbe MMC sera une des sections coniques à l'infini. Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que  $m$  &  $n$  représentent des exposants quelconques.

*Dém.* A cause des parallèles PN, CD, l'on aura  $PQ : CD :: EP : ED$ , &  $PN : CD :: PF : DF$ ; donc  $\overline{PQ}^m : \overline{CD}^m :: \overline{EP}^m : \overline{ED}^m$ , &  $\overline{PN}^n : \overline{CD}^n :: \overline{PF}^n : \overline{DF}^n$ ; donc, en multipliant par ordre, l'on aura  $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$ . Mais, *par hypothèse*,  $\overline{PQ}^m : \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n : \overline{PN}^n$ ; donc  $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n = \overline{PM}^{m+n}$ ; donc la cinquième des proportions précédentes se changera en celle-ci,  $\overline{PM}^{m+n} : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$ .

Supposons maintenant  $m = 1$ , &  $n = 1$ , l'on aura  $\overline{PM}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{EP} \times \overline{PF} : \overline{ED} \times \overline{DF}$ , c'est-à-dire, le carré de l'ordonnée PM : au carré de l'ordonnée CD :: le rectangle sous les abscisses qui correspondent à l'ordonnée PM : au rec-

V

tangle qui correspondent à l'ordonnée  $CD$  ; ce qui est le lieu à l'ellipse & à l'hyperbole ordinaires (*Note 5, num. 9 & 16*) ; donc  $\overline{PM}^{m+n} : \overline{CD}^{m+n}$

$:: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$  est le lieu à l'ellipse & à l'hyperbole de quelque genre qu'elles soient ; donc si les courbes  $AQC, BCN$ , *Fig. 8. Pl. 1.* deviennent des lignes droites, la courbe  $MC$  fera alors une des sections coniques à l'infini, sçavoir une ellipse, lorsque l'appliquée  $CD$ , qui part du point de rencontre  $C$ , tombe entre les extrémités  $A, B$ , & une hyperbole, lorsqu'elle tombe de part ou d'autre.

Enfin, *M. le Marquis de l'Hôpital* assure que si les courbes  $AQC, BCN$  deviennent des lignes droites, & que l'une des deux, *par exemple*,  $AQC$  soit parallèle au diamètre  $AB$ , la courbe  $MC$  fera une parabole, parce que dans cette courbe les diamètres sont parallèles à l'axe, & que la courbe  $AQC$  transformée en ligne droite, deviendra diamètre de la courbe  $MC$  qui aura  $AB$  pour axe.

#### NOTE XIV.

**L**A Proposition 5, *pag. 26* suppose la connoissance de la spirale d'Archimède dont voici la construction & l'équation. Divisez la circonférence  $ABCD$ , *Fig. 165. Pl. 8*, en un certain nombre de parties égales, *par exemple*, en 4. Faites-en de même pour son rayon  $aA$ . Imaginez-vous ensuite que le rayon  $aA$  parcourt en 4 instants égaux la

circonférence  $ABCD$ , tandis que dans le même tems le centre  $a$  monte de  $a$  en  $A$ . Il est évident que par ce double mouvement ce centre décrira la première spirale  $a, b, c, d, A$ . La seconde  $AghiF$  sera décrite de la même manière. Le centre  $a$  devra monter jusqu'au point  $F$ , tandis que le rayon  $aF$  parcourra la circonférence  $FGHI$ .

Pour avoir l'équation à la première spirale, nommons  $b$  la circonférence  $ABCD$ ,  $a$  son rayon  $aA$ , & supposons que le rayon  $aA$  parcourre l'arc  $AC$ , tandis que le centre  $a$  parcourt  $aN = ac$ . Dans cette supposition nous aurons l'arc  $AC$  pour abscisse, &  $ac$  pour son appliquée correspondante. Si l'on appelle cette abscisse  $x$ , & son appliquée correspondante  $y$ ; l'on dira la circonférence  $ABCD$  parcourue en 4 instans égaux : au rayon  $aA$  parcouru dans ce même tems :: l'abscisse  $AC$  parcourue, *par exemple*, en 2 instans : à l'appliquée  $aN = ac$  parcourue aussi dans 2 instans, c'est-à-dire,  $b : a :: x : y$ , donc  $by = ax$ , donc  $y = \frac{ax}{b}$ , & c'est là l'équation à la spirale d'Archimède. Descartes prétend dans le livre 2 de sa Géométrie que cette courbe n'est que mécanique. Voyez la discussion de ce point de Mathématique dans la vie littéraire de ce grand Homme, *pag.* 301 & suivantes ; elle forme le premier volume de notre *Traité de paix entre Descartes & Newton*, 3 vol. in-12 imprimé à Avignon chez la Veuve GIRARD en l'année 1763.

## NOTE XV.

**L**A Proposition 6, pag. 28 suppose la connoissance de la conchoïde de Nicomède ; aussi allons nous en faire la description , & assigner ensuite l'équation de cette courbe. Imaginez-vous donc les lignes droites indéfinies AP , CBc , Fig. 166. Pl. 8 , qui se coupent à angles droits au point B. Sur la première vous déterminerez AB & BP ; & après avoir pris le point P pour point fixe , vous ferez tourner autour de cette espèce de pôle la ligne BA , de telle sorte qu'elle passe toujours sur la directrice CBc. Dans toutes les positions que AP aura vis-à-vis CBc , vous couperez au dessus & au dessous de CBc les lignes CD , Cd , cD , cd égales à BA. La courbe qui joindra les points D , D sera la conchoïde supérieure ; & celle qui joindra les points d , d sera la conchoïde inférieure. Si l'on nomme BA ,  $a$  ; PD ,  $y$  ; PC ,  $x$  ; l'on aura nécessairement  $PD - PC = DC$  , donc  $PD - PC = BA$  , donc  $y - x = a$  ; & c'est-là l'équation à la conchoïde de Nicomède.

## NOTE XVI.

**L'**ARTICLE 26 , page 30 peut absolument le passer de commentaire. Si cependant l'on se trouvoit arrêté sur la fin de cet article , l'on pourroit consulter , non pas le livre 3 , mais la section 4 de la partie 1 du livre 2 de la Géométrie de Descartes commentée par le P. Rabuel Jésuite , & im-

primée en un vol. in-4°. en 1730 à Lyon chez Duplain. Au reste la Paraboloïde dont parle M. le Marquis de l'Hôpital, n'est pas le solide que les Géomètres appellent *conoïde paraboloïde*, c'est une ligne courbe du troisieme degré formée par l'intersection continuelle d'une ligne droite & d'une parabole ordinaire. *Voyez Descartes & son Commentateur à l'endroit cité.*

## NOTE XVII.

Pour comprendre sans peine la proposition 8, pag. 31, il faut se former auparavant une idée de la cissoïde de Dioclès représentée par la figure 14 de la planche 1. En voici la formation. L'on me donne le demi-cercle B A F avec la tangente infinie Bb. Du point F, je tire jusqu'à la tangente Bb prolongée à volonté, les lignes Fb, F A que je continue mentalement jusqu'en V, FR que je continue mentalement jusqu'en r &c. Parmi les lignes tirées du point F à la tangente Bb, je fais en sorte qu'il y en ait une, comme F A, qui passe par le milieu A de la demi-circonférence B A F. Sur la ligne Fb, je prens  $FM = bN$ . Sur la ligne F A prolongée mentalement jusqu'en V, je prens  $FA = AV$ . Sur la ligne FR prolongée mentalement jusqu'en r, je prens  $Ft = Rr$ ; la courbe qui passera par les points F, M, A, t sera la cissoïde de Dioclès. Dans cette courbe l'on a  $FM = bN$ , & par conséquent  $Fb = FN + FM$ . L'on a encore  $FP = Pb$ , & par conséquent  $Fb = 2FP$ . Mais

V 3

$Fb = FN + FM$ , donc  $FN + FM = 2FP$ .  
 Nommons donc avec M. de l'Hôpital  $FM y$ ,  
 $FN z$ ,  $FP x$ , l'on aura  $y + z = 2x$ ; & c'est-là  
 l'équation à la cissoïde.

## N O T E X V I I I.

**L**A connoissance de la quadratrice de Dinostrate est nécessaire pour l'intelligence parfaite de la Proposition 9<sup>e</sup>. pag. 34. Pour en saisir facilement la formation, imaginez-vous que tandis que le rayon  $AF$ , Fig. 17. Pl. 1, parcourt par un mouvement uniforme le quart de cercle  $AB$ , la tangente  $AH$  va parallèlement à elle-même le long du même rayon  $AF$ , de telle sorte que lorsque le rayon  $AF$  se trouve avoir parcouru le quart, la moitié, les trois quarts de la circonférence  $AB$ , la tangente  $AH$  a parcouru le quart, la moitié, les trois quarts du rayon  $AF$ ; la courbe  $AMG$  qui passera par tous les points d'intersections du rayon  $AF$  & de la tangente  $AH$ , s'appelle *quadratrice*. Dinostrate son inventeur s'en servit pour trouver la quadrature approchée du cercle. Pour avoir l'équation à cette courbe, nommons  $b$  le quart de cercle  $AB$ ,  $a$  le rayon  $AF$ ,  $y$  une partie quelconque de la circonférence  $AB$  parcourue par le rayon  $AF$ ,  $x$  une partie quelconque du rayon  $AF$  parcourue par la tangente  $AH$ , nous aurons par construction  $b$  :  $a :: y : x$ , donc  $ay = bx$ , donc  $y = \frac{bx}{a}$ , équation à la quadratrice.

## NOTE XIX.

L'ARTICLE 31, pag. 36 a besoin de deux éclaircissements; on les trouvera dans les réponses aux questions suivantes.

*Question 1.* En mettant pour  $x$  sa valeur  $\frac{ay}{b}$ , & en divisant ensuite le tout par  $b - y$ ; comment a-t-on trouvé  $\frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$ ?

*Réponse.* 1°. En supposant  $x = \frac{ay}{b}$ , l'on aura  
 $aa - ax = aa - \frac{aay}{b} = \frac{aab - aay}{b}$ .

2°.  $aa - ax = \frac{aab - aay}{b}$ ; donc  $\frac{bss - yss}{aa - ax}$  sera  
 égal à  $bss - yss$  divisé par  $\frac{aab - aay}{b}$ .

3°.  $bss - yss$  divisé par  $\frac{aab - aay}{b}$  donne évidemment  $\frac{bbss - byss}{aab - aay}$ .

4°. Divisez par  $b - y$  le numérateur & le dénominateur de cette dernière fraction, vous aurez  $\frac{bss}{aa}$ .

*Seconde Question.* En supposant  $FT = \frac{bss}{aa}$ , comment peut-on prouver que  $FT$  est troisième proportionnelle à  $FG = \frac{aa}{b}$ , & à  $FM = s$ ?



*Réponse.* La troisieme proportionnelle aux quantités  $\frac{a a}{b}$  &  $s$  est  $\frac{b s s}{a a}$ , puisque  $\frac{a a}{b} : s :: s : \frac{b s s}{a a}$ ; donc &c.

## NOTE XX.

**L**ES remarques suivantes ne seront pas inutiles pour l'intelligence de l'article 32, pag. 37.

1<sup>o</sup>. On peut regarder  $m R$ , Fig. 18. Pl. 2, comme parallèle à  $M F$ , parce que l'angle  $M F R$  est supposé infiniment petit, & par conséquent sensiblement nul. Par la même raison les lignes  $m S$  &  $m O$  peuvent être regardées comme parallèles, l'une à  $M G$  & l'autre à  $M H$ .

2<sup>o</sup>. Le centre commun de gravité des poids appliqués en  $C, D, E$ , que j'appellerai les poids  $C, D, E$ , est le point autour duquel ces poids étant suspendus comme autour du point fixe d'un levier quelconque, resteroient dans un parfait équilibre.

3<sup>o</sup>. Pour trouver le centre commun de gravité des poids  $C, D, E$ , je cherche d'abord celui des poids  $D$  &  $E$  par la règle suivante; la somme des poids  $D$  &  $E$  : à la longueur de la ligne qui marque la distance de leurs centres :: le poids  $D$  : à la distance du poids  $E$  au centre commun de gravité que je cherche, & que je nomme  $x$ . Cette premiere opération faite, je rassemble mentalement les poids  $D$  &  $E$  à leur centre commun de gravité  $x$ ; & pour trouver le centre commun de

gravité des trois corps donnés, je dis, la somme des poids  $C, D, E$  : à la longueur de la ligne qui marque la distance du point  $x$  au centre du poids  $C$  : : le poids  $C$  : à la distance du point  $x$  au centre commun de gravité des poids  $C, D, E$ . Ce centre se trouvera dans la ligne  $MP$  à laquelle sont perpendiculaires les lignes  $CL, KD, IE$ ; & comme la tangente au point  $M$  est parallèle aux lignes  $CL, KD, IE$ , il s'ensuit que  $MP$  est perpendiculaire à la tangente au point  $M$ ; donc la perpendiculaire que l'on cherche pour la solution du problème proposé, est celle qui passe par le centre commun de gravité des poids  $C, D, E$ .

## NOTE XXI.

DES lignes  $a, b$  dont il est parlé sur la fin de l'article 34, pag. 44, l'une  $b$  est tirée d'un point quelconque de la courbe perpendiculairement à la directrice, l'autre  $a$  est tirée du même point au foyer. Or il est évident que dans la parabole  $a$  est égal à  $b$ , que dans l'ellipse  $a$  est moindre, & que dans l'hyperbole  $a$  est plus grand que  $b$ .

## NOTE XXII.

M. le Marquis de l'Hôpital assure à la fin de l'article 36, page 45, que  $MR, Fig. 25. Pl. 2$ , est égal à  $\frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ}$ . Pour le faire toucher au doigt, il auroit dû tirer la ligne  $OV$ , parallèle à  $QP$ ; il a été absolument nécessaire,

pour nous rendre intelligible, d'ajouter cette ligne OV à la figure 25. Cela une fois fait, voici comment je raisonne.

1°. A cause des triangles semblables OVS, OLR, l'on a  $OV : OL :: VS : LR$ ; l'on a donc  $PQ : PM :: VS : LR$ . Mais  $VS = QS - QV = QS - OP$ ; donc  $PQ : PM :: QS - OP : LR$ ; donc  $LR = \frac{PM \times QS - OP}{PQ}$ .

2°.  $MR = LR + OP$ ; donc  $MR = \frac{PM \times QS - OP + PQ \times OP}{PQ}$ .

3°.  $PQ = PM + MQ$ ; donc  $MR = \frac{PM \times QS - OP + OP \times PM + MQ}{PQ}$ ; donc l'on aura, en ôtant les quantités qui se détruisent  $MR = \frac{PM \times QS + OP \times MQ}{PQ}$ . Prenez garde à la

faute qui se trouve à la page 46; elle est marquée dans l'errata.

## NOTE XXIII.

Pour mettre à la portée de tout le monde l'article 39, pag. 48, il est nécessaire de faire connoître la *logarithmique* représentée par la Figure 80 de la Planche 5. C'est une courbe dont les abscisses sont les logarithmes des ordonnées, c'est-à-dire, c'est une courbe dont les abscisses suivent la proportion arithmétique, & les ordonnées la proportion géométrique. En voici la description. Sur la ligne KQ qu'on pourra prolonger à volonté, élevez les deux perpendiculai-

res  $PM$ ,  $fn$ . Coupez  $Pf$  en deux parties égales au point  $p$ . Elevez à ce point la perpendiculaire  $pm$  qui soit moyenne proportionnelle aux lignes  $PM$  &  $fn$ . Prenez  $fg = pf$ . Elevez au point  $g$  la perpendiculaire  $go$  qui soit troisième proportionnelle aux lignes  $pm$ ,  $fn$ ; la courbe que vous tirerez par les points  $M$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $o$  sera une portion de la *logarithmique*. En effet, tandis que les ordonnées  $PM$ ,  $pm$ ,  $fn$ ,  $go$  gardent la proportion géométrique continue, les abscisses correspondantes  $Pp$ ,  $Pf$ ,  $Pg$  gardent la proportion arithmétique continue; donc  $Pp$  peut être regardé comme le logarithme de  $pm$ ;  $Pf$  comme le logarithme de  $fn$ ;  $Pg$  comme le logarithme de  $go$ , &c. Dans cette courbe, il est vrai, la ligne  $PM$  n'a point de logarithme; mais dans le fait elle ne doit en avoir aucun, puisqu'elle est prise pour l'unité, & que le logarithme de l'unité est  $o$ .

Ce qu'il faut bien remarquer, c'est que dans toute *logarithmique* les soutangentes sont égales, par exemple, les soutangentes  $pb$ ,  $fe$ , &c. sont égales. Cela vient de ce que  $Pp$ ,  $pf$ , &c. sont des quantités égales entr'elles, de même que  $Mm$ ,  $mn$ , &c. Voilà pourquoi M. le Marquis de l'Hôpital annonce que lorsque la soutangente demeurera par tout la même, la courbe  $LM$ , (Fig. 26. Pl. 2.) sera *logarithmique*.

---

#### NOTE XXIV.

COMME l'article 40, page 49 sera appliqué à la *logarithmique spirale*, il est nécessaire de don-

ner ici la description de cette courbe. Divisez le quart de cercle BGD, (*Fig. 87. Pl. 5.*) en un nombre quelconque de parties égales  $Bb$ ,  $bG$ ,  $Gg$ ,  $gD$ . Sur les rayons  $Ob$ ,  $OG$ ,  $Og$ , prenez les parties  $ON$ ,  $On$ ,  $Or$  en proportion continue; les points  $N$ ,  $n$ ,  $r$  appartiendront à la *logarithmique spirale*. Cette courbe a pour appliquées les lignes  $ON$ ,  $On$ ,  $Or$ , ou si l'on veut,  $bN$ ,  $Gn$ ,  $gr$  qui sont en proportion géométrique continue, & pour abscisses correspondantes les arcs  $Bb$ ,  $BG$ ,  $Bg$  qui sont en proportion arithmétique continue. Aussi peut-on regarder celles-ci comme les logarithmes de celles-là.

C'est dans l'article 42 que se fait l'application de l'article 40 à la logarithmique spirale. L'on y suppose que la courbe  $FQ$  (*Fig. 27. Pl. 2.*) est une hyperbole dont  $AB$  est l'une des asymptotes. Nous avons déjà fait remarquer dans la *Note 5. num. 20.* que  $AG \times GQ$  est un rectangle égal à un carré constant que  $M.$  de l'Hôpital nomme ici  $ff$ ; donc  $uy = ff$ ; donc  $GQ(u) = \frac{ff}{y}$ ; donc, en supposant le point  $G$  au point  $A$ , l'on aura  $GQ = \frac{ff}{o} = \infty$ ; aussi  $GQ$  devient-elle alors seconde asymptote de l'hyperbole  $FQ$ . L'espace  $FEGQ$  est donc regardé comme infini à cause de son côté infini  $GQ$ .

Lorsque  $AG$  devient  $= o$ , l'on a  $AM(y) = o$ ; donc  $uy = ff$ , devient  $ff = o$ , & par la même  $AT(\frac{ffy}{cc})$  devient  $\frac{o}{cc} = o$ ; donc lorsque

le point M de la courbe ML est arrivé au centre du cercle BN, c'est-à-dire, lorsque  $AM = 0$ , l'on a  $AT = 0$ . D'où l'on voit que la raison de AM à AT est constante; ce qui est une propriété de la logarithmique spirale. Tout ceci s'éclaircira encore plus par la lecture de l'article 91, pag. 127, où l'on verra que  $AM : AT :: AC : CM$ , (Fig. 81. Pl. 5.) Nous remarquerons en finissant cette Note, que l'on donne quelquefois le nom d'axe à la ligne des abscisses; ce n'est qu'en ce sens que l'on peut regarder l'assymptote AB (Fig. 27. Pl. 2.) comme axe de l'hyperbole FQ.

## NOTE XXV.

COMME la maniere dont M. le Marquis de l'Hôpital tire dans la proposition 16 les tangentes des courbes AM, BN, CO, (Fig. 32. Pl. 3.) n'a aucun rapport avec ce qu'il a dit dans toute sa seconde Section sur la méthode de trouver par le calcul différentiel les tangentes de toutes sortes de lignes courbes, nous ne donnerons aucun commentaire de cette proposition qui dans le fond nous paroît ici assez déplacée. Nous remarquerons cependant que c'est par son inertie que le poids A s'oppose à la direction BF du poids B. Nous remarquerons encore que ce qu'on a dit du poids A par rapport au poids B, doit se dire des poids A & B par rapport au poids C; car A est sensiblement égal à la fraction  $\frac{A \times BF}{BC}$ .

## NOTE XXVI.

LA règle générale dont on se sert ; lorsqu'on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une courbe , est celle-ci : Dans le point où la quantité est devenue la plus grande , son accroissement est devenu nul , & dans le point où elle est devenue la plus petite , son décroissement est aussi devenu nul. D'où il suit qu'ayant différencié l'équation qui exprime la quantité dont il s'agit , ou qui convient à la courbe dont il s'agit , il faut faire  $= 0$  la différentielle de la variable qui va en croissant , puis en décroissant ; ou en décroissant , puis en croissant ; & l'équation différenciée pouvant être réduite par ce moyen à des termes finis , elle exprimera le *maximum* , ou le *minimum* qu'on cherche.

Pour trouver , par exemple , la plus grande ordonnée au grand axe AB de l'ellipse ADB (Fig. 30. Pl. 2.) nommons  $2a$ , le grand axe AB ;  $2b$  , le petit axe , & par conséquent  $b$  , le demi-petit axe DE ; nommons  $y$  , une ordonnée quelconque au grand axe ; &  $x$  , son abscisse correspondante. Cela supposé , voici comment je raisonne.

1°. L'équation à l'ellipse est  $aayy = 2abbx - bbxx$  (Note 5. num. 10).

2°. Cette équation différenciée devient  $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$ .

3°. Comme l'ordonnée qu'on cherche , est supposée arrivée à son *maximum* , elle aura à ce point sa différentielle  $dy = 0$  , donc  $2aay \times dy = 2aay$ ,

$\times 0$ ; donc  $2aaydy = 0$ ; donc  $2abbdx - 2bbxdx = 0$ ; donc  $2abbdx = 2bbxdx$ ; donc, en divisant tout par  $2bbdx$ , l'on aura  $a = x$ ; donc lorsque dans l'ellipse l'abscisse  $x$  devient  $a$ , l'ordonnée correspondante  $y$  est arrivée à son *maximum*; donc lorsque dans l'ellipse l'abscisse devient la moitié du grand axe, l'ordonnée correspondante est arrivée à son *maximum*. Mais le demi-petit axe DE a pour abscisse correspondante AE, moitié du grand axe AB; donc dans une ellipse quelconque la moitié du petit axe est la plus grande ordonnée à l'axe principal.

Voilà comment il faut opérer, lorsqu'on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une courbe quelconque dont l'équation est donnée. Voici ce que veut dire M. le Marquis de l'Hôpital, lorsqu'il assure qu'il y a des occasions où une quantité ne peut pas devenir de positive négative, sans passer par l'infini. Toutes les tangentes TM, par exemple, tirées jusqu'au point D exclusivement (Fig. 30. Pl. 2.) ont des soutangentes TP qui vont toujours en augmentant jusqu'au point E, & qui jusqu'à ce point sont regardées comme des quantités positives. Au point D la tangente TM devient infinie, & sa soutangente TP qui lui est parallèle, suit nécessairement le même sort. Après le point D, les tangentes TM & les soutangentes TP vont toujours en diminuant, & celles-ci sont regardées comme des quantités négatives, puisqu'elles changent de côté; donc il y a des occasions où une quantité finie ne peut pas



devenir de positive négative, sans passer par l'infini. Ce que nous avons dit de la figure 30 par rapport au *maximum* DE, se vérifie dans la figure 31 par rapport au *minimum* DE.

Il y a des occasions où la tangente se confond avec l'ordonnée, c'est-à-dire, où la tangente devient la prolongation de l'ordonnée, comme au point D de la figure 33 de la planche 3, auquel il seroit impossible de tirer une tangente, sans qu'elle ne fût une même ligne avec le *minimum* DE. Alors la différentielle  $R_m$  devient infinie. Mais avant que de devenir infinie, elle avoit été positive, & après être devenue infinie, elle est négative, parce qu'elle change de côté; donc il y a des occasions où une quantité infiniment petite ne peut pas devenir de positive négative, sans passer par l'infini. La figure 34 de la planche 3, prête à un raisonnement semblable; tout le monde voit que la tangente au point D se confondroit avec le *maximum* DE. Mais ce sont là des raisonnemens qu'il ne faut pas pousser trop loin, de peur de se perdre dans une métaphysique intelligible. Contentons-nous de différentier l'équation donnée; de faire la différentielle  $= 0$ ; & soyons assuré que si la courbe à laquelle appartient l'équation donnée, a un *maximum* ou un *minimum*, nous le trouverons par cette méthode. Je dis, si la courbe dont il s'agit, a un *maximum* ou un *minimum*, parce que les courbes dont les appliquées croissent jusqu'à l'infini, n'ont point de *maximum*, & celles dont les appliquées décroissent

DES INFINIMENT PETITS. 321  
croissent jusqu'à 0, n'ont point de *minimum*.

NOTE XXVII.

COMME l'article 48, pag. 59, contient le premier des 13 exemples auxquels M. le Marquis de l'Hôpital a appliqué la méthode de *Maximis & Minimis*, nous allons en donner le calcul, sans omettre la moindre des équations. Le voici; il n'a besoin d'aucune explication.

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= axy \\ 3xxdx + 3yydy &= aydx + axdy \\ 3xxdx - aydx &= axdy - 3yydy \\ 3xxdx - aydx &= ax \times 0 - 3yy \times 0 \\ 3xxdx - aydx &= 0 \\ 3xxdx &= aydx \\ 3xx &= ay \\ \frac{3xx}{a} &= y\end{aligned}$$

Mettons la nouvelle valeur de  $y$  dans l'équation  $x^3 + y^3 = axy$ , nous aurons

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{27x^6}{a^3} &= \frac{3ax^3}{a} \\ x^3 + \frac{27x^6}{a^3} &= 3x^3 \\ \frac{27x^6}{a^3} &= 2x^3 \\ 27x^6 &= 2a^3x^3 \\ 3x^3 &= \sqrt[3]{2a^3x^3} \\ 3x^3 &= ax\sqrt[3]{2} \\ 3x &= a\sqrt[3]{2} \\ x &= \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

X

## NOTE XXVIII.

L'ARTICLE 49, pag. 60 a besoin du Commentaire suivant. Pour trouver  $AE = a$ , il n'étoit pas nécessaire de se jeter dans l'infini ; il falloit élever au cube les 2 membres de l'équation donnée, & opérer par la méthode ordinaire en la maniere suivante :

$$y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \frac{a - x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$$

$$y - a = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{aa - 2ax + xx}$$

$$y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a \times aa - 2ax + xx$$

$$y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + axx$$

En différenciant cette dernière équation, l'on aura

$$3yydy - 6aydy + 3aady = -2aadx + 2axdx$$

$$3yy \times 0 - 6ay \times 0 + 3aa \times 0 = -2aadx + 2axdx$$

$$0 = -2aadx + 2axdx$$

$$2aadx = 2axdx$$

$$adx = xdx$$

$$a = x$$

## NOTE XXIX.

L'ARTICLE 50, pag. 60 ne peut paroître obscur, qu'à ceux qui ne connoitroient pas la nature, ou les propriétés de la roulette ; nous les avons expliquées dans les notes 11 & 12.

## NOTE XXX.

L'ON comprendra l'article 51, pag. 61, si l'on fait attention aux remarques suivantes.

1°.  $\frac{a-x^{n-1}}{a-x}$  multiplié par  $\frac{a-x^n}{a-x}$  donne évidemment pour produit  $\frac{a-x^n}{a-x}$ , parce que  $\frac{a-x^{n-1}}{a-x}$  multiplié par  $\frac{a-x^n}{a-x}$ , c'est  $\frac{a-x^{n-1}}{a-x}$  élevé d'un degré; donc  $\frac{a-x^n}{a-x}$  divisé par  $\frac{a-x^{n-1}}{a-x}$  doit donner pour quotient  $a-x$ , parce que le produit divisé par le multiplicande est toujours égal au multiplicateur.

2°. Par la même raison  $x^m$  divisé par  $x^{m-1}$  doit donner pour quotient  $x$ , car  $x^{m-1}$  multiplié par  $x$  donne pour produit  $x^m$ .

3°. En supposant  $x$  infinie, l'on aura  $\frac{xx}{x-a} = \frac{xx}{x}$  (Note 2. num. 4); donc en supposant  $x$  infinie, l'on aura  $y = \frac{xx}{x}$ , & par conséquent  $y = x$ .

## NOTE XXXI.

L'ARTICLE 52, pag. 63, est terminé par une équation du second degré qui demande les éclaircissements suivants.

1°.  $cxx - axx - bxx = xx \times \frac{c-a-b}{c}$ ; donc en faisant  $c-a-b = e$ , l'on aura  $exx = cxx - axx - bxx$ ; & l'équation qui termine l'article 52 se changera en celle-ci  $exx + 2acx = abc$ .

2°.  $exx + 2acx = abc$ , donc  $xx + \frac{2ac}{e}x = \frac{abc}{e}$ .

3°. Cette dernière équation maniée à la manière ordinaire, donnera  $x = \sqrt{\frac{abc}{e} + \frac{aacc}{ee}} - \frac{ac}{e}$ .

4°. Si  $e = a+b$ , l'on aura  $c-a-b = 0$ , &  
X 2

par conséquent  $cxx - axx - bxx = 0$  ; donc l'équation qui termine l'article 52 deviendra  $2acx = abc$  ; donc  $2x = b$  ; donc  $x = \frac{1}{2} b$ .

## NOTE XXXII.

VOICI ce qui peut arrêter un commençant dans la lecture de l'article 53, pag. 64.

1°. Le cone que décrira le triangle rectangle AEF, Fig. 40. Pl. 3, aura pour base le cercle dont le rayon sera l'ordonnée FE, & pour hauteur la ligne EA. De même le cone que décrira le triangle rectangle APN, aura pour base le cercle dont le rayon sera l'ordonnée NP, & pour hauteur la ligne AP. Voyez la formation du cone dans les élémens de Géométrie de M. l'Abbé de la Caille, art. 658 de l'édition de 1764.

2°. Par la propriété du cercle, l'on aura AE : EF :: EF : EB ; donc  $EF^2 = ax - xx$  ; donc  $EF = \sqrt{ax - xx}$ .

3°.  $AF^2 = EF^2 + AE^2$  ; donc  $AF^2 = ax - xx + xx$  ; donc  $AF^2 = ax$  ; donc  $AF = \sqrt{ax}$ .

4°. La fraction qui termine l'article 53 ne peut pas être  $= 0$ , sans que l'on ait son numérateur  $2axdx - 3xxdx = 0$  ; l'on aura donc alors  $2axdx = 3xxdx$  ; donc  $2ax = 3xx$  ; donc  $2a = 3x$ , donc  $x = \frac{2}{3} a$ .

## NOTE XXXIII.

UN parallélépipède est un solide terminé par six surfaces rectangles, dont les deux opposées sont égales & parallèles ; & un cube est un so-

l'ide terminé par six quarrés égaux, qui sont tous à angles droits l'un sur l'autre. Tout cube est donc un parallélepède, mais tout parallélepède n'est pas un cube. Il s'agit maintenant de bien se convaincre que si  $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$ , l'on aura  $\frac{a^3}{bx} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$ ; en voici la démonstration.

$$1^0. xx = \frac{a^3}{b}.$$

$$2^0. \text{ Le quarré de } \frac{a^3}{bx} \text{ est } \frac{a^6}{bbxx}; \text{ donc } \frac{a^6}{bbxx} = \frac{a^6b}{a^3bb} = \frac{a^3}{b}; \text{ donc si le quarré de } \frac{a^3}{bx} \text{ est } \frac{a^3}{b}, \text{ l'on aura } \frac{a^3}{bx} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}.$$

## NOTE XXXIV.

DANS le triangle rectangle GIE, Fig. 41. Pl. 3, si l'on prend l'hypothénuse GE pour sinus total, le côté GI deviendra le sinus droit de l'angle GEI. Par la même raison dans le triangle rectangle GLE, l'on ne peut pas prendre GE pour sinus total, sans avoir GL pour sinus droit de l'angle GEL, & de son supplément GEC; ce sont là les premiers éléments de la Trigonométrie rectiligne.

## NOTE XXXV.

L'ARTICLE 58, pag. 69 me paroît traité avec moins d'exactitude que les autres; & les preuves que j'ai à en apporter, ne sont par malheur que trop démonstratives.

1°. L'angle FEG étant égal à l'angle CEG, *Fig. 42, Pl. 3*; les angles en G étant droits, & le côté GE étant commun aux deux triangles FGE & CGE; il falloit faire ces deux triangles égaux en tout sens: c'est là une inadvertance qui choque la vue d'un lecteur exact & attentif.

2°. En supposant que l'angle FEG doive être égal à l'angle CEG, le problème est très facile à résoudre. Le point E que l'on cherche, sera celui par lequel passera le rayon du cercle AEB qui, après avoir été prolongé, ira couper perpendiculairement la ligne CF, c'est-à-dire, la ligne qui joint les deux points donnés C, F. Il ne sera pas donc nécessaire de chercher ce point par l'intersection du cercle & de l'hyperbole.

3°. La ligne  $OB = a$ , & la ligne  $OC = b$ , ne sont pas les données  $a$  &  $b$  dont on parle dans les articles 56 & 57. En effet l'angle FEG n'est égal à l'angle CEG, que lorsque  $a = b$ . Mais  $OB$  n'est pas égal à  $OC$  dans l'article 58, & cependant dans cet article on suppose l'angle FEG égal à l'angle CEG; donc &c.

4°. Quoiqu'il me paroisse fort inutile de résoudre le problème de l'article 58 par l'intersection du cercle & de l'hyperbole, nous remarquerons cependant que  $yy - xx - \frac{aay}{c} + \frac{aax}{b} = 0$  est un lieu à une hyperbole équilatère, dont le grand axe seroit  $2\sqrt{\frac{a^4}{4bb} - \frac{a^4}{4cc}}$ . On trouvera ce grand axe en comparant, par la méthode ordinaire, l'équation donnée avec la formule générale qui se

trouve dans le Traité des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, *pag.* 234, ou avec celle qui se trouve dans le premier Tome du Cours de Mathématique de Wolf, *pag.* 382. Or le grand axe d'une hyperbole équilatère étant donné, la construction de l'hyperbole se présente d'elle même, parce que dans cette courbe le grand axe, le petit axe & le paramètre ont la même valeur.

## NOTE XXXVI.

L'ÉTAT de la question de l'article 59, *pag.* 70, est très mal énoncé. Aussi les remarques suivantes nous paroissent-elles absolument nécessaires.

1°.  $a$  &  $b$  ne marquent pas les espaces parcourus dans un tems quelconque  $c$ , mais la nature des différents terrains qu'il faut parcourir en deçà & en delà de la ligne  $AB$ . En effet puisqu'on suppose le tems  $c$  égal, ou plutôt constant de part & d'autre, & que l'on suppose inégaux les espaces parcourus  $CE$  &  $EF$ , on ne peut pas supposer que la nature du terrain soit par tout la même.

2°. En examinant attentivement la *Fig.* 43 de la *Pl.* 3, vous vous convaincrez qu'en prenant  $CE$  pour sinus total dans le triangle rectangle  $CAE$ , &  $GE$  pour sinus total dans le triangle rectangle  $GLE$ ,  $AE$  &  $GL$  deviennent les sinus droits de deux angles égaux; donc  $AE = GL$ . De même en prenant  $GE$  pour sinus total dans le triangle  $GIE$ , &  $EH$  pour sinus to-

X 4



tal dans le triangle EDH, GI & ED deviendront les sinus droits de deux angles égaux ; donc  $GI = ED$ .

3°. Pour trouver la valeur de  $x$ , l'on opérera sur l'équation proposée suivant les regles marquées dans tous les livres élémentaires d'algèbre ; nous avons droit de supposer qu'on ne lit pas les Infinitement Petits de M. le Marquis de l'Hôpital, sans avoir appris auparavant à manier une équation du quatrième degré.

4°. Pour manier plus facilement l'équation proposée, vous ferez  $aa - bb = m$  ;  $-2aaf + 2bbf = n$  ;  $+aaff + aagg - bbff - bbhh = p$  ;  $-2aafgg = -q$  ;  $aaffgg = r$  ; & l'équation proposée se transformera en celle-ci,  $mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r = 0$  ; donc  $x^4 + \frac{n}{m}x^3 + \frac{p}{m}x^2 - \frac{q}{m}x + \frac{r}{m} = 0$ .

Pour opérer plus facilement sur cette équation transformée, faites  $\frac{n}{m} = a$ ,  $\frac{p}{m} = b$ ,  $\frac{q}{m} = c$ ,  $\frac{r}{m} = d$ , vous aurez  $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ .

5°. Vous ferez évanouir le second terme de cette dernière équation, en faisant  $x = z - \frac{1}{4}a$ , parce que si dans une équation supérieure, le second terme est positif, l'on augmente la racine  $x$  d'une quantité fractionnaire qui ait pour numérateur le coefficient du second terme, & pour dénominateur l'exposant du premier terme de l'équation donnée ; l'on a par ce moyen une équation transformée dont le second terme est évanoui.

6°. Vous chercherez la nouvelle valeur de l'é-

quation  $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ , en supposant  $x = z - \frac{1}{4}a$ ; vous trouverez une nouvelle équation dans laquelle le second terme sera évanoui.

7°. Pour réduire cette nouvelle équation aux termes les plus simples, vous appellerez *f* les différents coefficients de  $z$ ; vous appellerez *g* les différents coefficients de  $z$ ; vous appellerez enfin *h* l'assemblage des connues qui forment le dernier terme de l'équation; & vous aurez  $z^4 + fz^3 + gz^2 + h = 0$ .

8°. Vous opérerez sur cette équation du quatrième degré, comme ont fait en pareille occasion Wolf dans son cours de Mathématique, *Tom. 1. pag. 336*; Clairaut dans ses *Éléments d'Algèbre*, *pag. 287*; Rabuel dans son commentaire sur la géométrie de Descartes, *pag. 473*. Tout homme qui entreprend l'étude des infiniment petits doit, ou avoir lu les livres que nous venons de citer, ou être en état de les lire sans y rencontrer presque aucune difficulté.

---

NOTE XXXVII.

LES remarques suivantes jetteront un grand jour sur l'article 61. *pag. 74*.

1°. L'on ne doit pas entreprendre la lecture de l'article 61, sans s'être auparavant formé une idée nette de la sphère.

2°. Le crépuscule est un jour imparfait que l'on a quelque tems avant le lever, & quelque tems après le coucher du Soleil. Voici la cause physique de ce phénomène. Lorsque le Soleil n'est

pas enfoncé sous notre horizon au dessous de 18 degrés, plusieurs rayons de lumière rencontrent des couches assez denses de l'atmosphère terrestre. Quelques-uns s'y brisent assez, pour que leur réfraction les détermine à se porter vers la terre. Quelques autres (& c'est le grand nombre) s'y brisent assez pour pouvoir se rendre dans des couches composées de particules capables de les réfléchir sur la surface de la terre; donc nous devons avoir un jour imparfait, lorsque le Soleil n'est pas enfoncé au dessous de notre horizon de 18 degrés. Au reste lorsqu'on parle d'un enforacement de 18 degrés, on entend 18 degrés pris sur un cercle vertical, c'est-à-dire, sur un grand cercle que l'on imagine passer par le zénith, & couper perpendiculairement l'horizon. C'est pourquoi les habitans de la zone torride ont des crépuscules fort courts, parce que les cercles que parcourt le Soleil étant presque perpendiculaires à leur horizon, cet astre gagne fort vite le 18<sup>e</sup>. degré de son abaissement.

3°. La ligne CK (fig. 45. pl. 3) n'est pas précisément le sinus de l'arc EM, mais elle est égale à ce sinus. Pour s'en convaincre, il faut chercher sur une sphère le sinus de l'arc de la déclinaison du Soleil pour tel ou tel jour. Vous trouverez qu'il est égal à la partie du diamètre du cercle de déclinaison, interceptée entre le centre de la sphère & le diamètre du parallèle que décrit ce jour là le Soleil. Mais CK est la partie du diamètre du cercle de la déclinaison du Soleil, in-

terceptée entre le centre C de la sphère, & la ligne FG, diamètre du parallèle que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuscule; donc la ligne CK est égale au sinus de l'arc de la déclinaison du Soleil, le jour du plus petit crépuscule.

4°. Un des points les plus importants de la démonstration de l'article 61 est que  $Dd$  soit égal à  $Ee$ , & que la différence entre  $GD$ ,  $gd$  soit égale à la différence entre  $FE$  &  $fe$ . Or toutes ces égalités sont nécessaires dans une figure où l'on a tiré les quarts de cercle  $Pem$  &  $Pdn$  infiniment proches des quarts de cercle  $PEM$  &  $PDN$ , & dans laquelle l'on suppose le plan  $fedg$  parallèle au plan  $FEDG$ , & infiniment près de ce plan.

5°. Par l'article 50, l'on a ces 2 proportions,  $CO : CG :: Dd : \text{à la différence entre } DG \text{ \& } dg$ ; &  $IQ : IF :: Ee : \text{à la différence entre } FE \text{ \& } fe$ ; donc  $CO : CG :: IQ : IF$ ; donc  $CO : CG :: CO + IQ : CG + IF$ ; donc  $CO : CG :: OX : GL$ . Mais à cause des triangles rectangles semblables  $CVO$ ,  $CKG$ ,  $FLG$ , l'on a  $CO : CG :: OV : GK$ ; donc  $OV : GK :: OX : GL$ ; donc  $OV : OX :: GK : GL$ . Mais  $GK : GL :: CK : FL$  ou  $QX$ ; donc  $OV : OX :: CK : QX$ ; donc  $OV : CK :: OX : QX :: QX : XH$ ; donc  $OV : CK :: QX : XH$ ; donc  $QX : XH :: OV : CK$ ; donc le sinus total : à la tangente de 9 degrés :: le sinus de l'élévation du pôle : au sinus de la déclinaison australe du Soleil dans le tems du plus petit crépuscule; & voila le problème résolu.

6°. Il est démontré dans tous les élémens de

Trigonométrie que le rayon ou sinus total : à la tangente :: la cotangente : au rayon ; donc la cotangente de 9 degrés : au rayon , que l'on suppose  $= 1$  , :: le sinus de l'élévation du pôle : au sinus de la déclinaison ; donc si l'on ôte du logarithme du sinus de l'élévation du pôle le logarithme de la cotangente de 9 degrés , le reste sera le logarithme du sinus cherché , parce que le logarithme de  $1 = 0$ . Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que dans son calcul M. le Marquis de l'Hôpital s'est servi de Tables qui donnent 0 pour caractéristique aux logarithmes dont la caractéristique est 10 dans les tables ordinaires.

## NOTE XXXVIII.

IL suit évidemment de la définition 1 qu'apporte M. le Marquis de l'Hôpital au commencement de la Section IV , que  $Sn$  (Fig. 46 , Pl. 3 ,) est la *différence* de la *différence*  $mR$  , ou la *différence seconde* de  $PM$ . C'est cependant  $Hn$  qui est la *différence seconde* de  $PM$  , comme notre Auteur en convient. Je voudrois donc dire que la *différence seconde* de  $PM$  n'est autre chose que la différence qui se trouve entre la *différence première*  $mR$  , & son augmentation  $Sn$  ; & qu'en général une *différence seconde quelconque* n'est autre chose que la différence qui se trouve entre la *différence première* & son augmentation ou diminution suivante. En effet  $Hn = mR - Sn$ .

Il suit encore de la même définition que  $oT$  devroit être la différence troisième de  $PM$ . Cepen-

dant M. le Marquis de l'Hôpital nous avertit que la différence troisieme de  $PM$  n'est autre chose que la différence qui se trouve entre  $Hn$  &  $Lo$ . La différence troisieme de  $PM$  est donc la différence qui se trouve entre sa différence seconde  $Hn$ , & une ligne quelconque  $Lo$  dont les propriétés sont 1. d'être parallèle à  $Hn$ , 2. d'être extérieure à la courbe  $AMD$ , 3. d'être terminée par la ligne  $nL$  parallèle à  $ST$ . Il seroit bien difficile de donner une définition claire de la différence troisieme considérée en général.

## NOTE XXXIX.

L'AVERTISSEMENT qui suit la définition 1 de la Section IV, fait toujours quelque peine aux commençans. Ils s'imaginent que  $dy \times dy$  doit donner  $ddy$  ou  $d^2y$ , & que par conséquent le quarré de  $dy$  doit être  $d^2y^2$ , & non pas  $dy^2$ ; son cube,  $d^3y^3$ , & non pas  $dy^3$  &c. C'est là une erreur dont il est facile de se guerir, lorsqu'on fait attention que  $dy$  est une quantité très simple, & non pas une quantité composée de  $d$  multipliant  $y$ . Par la même raison le quarré de  $ddy$  sera  $ddy^2$ , son cube  $ddy^3$  &c.

## NOTE XL.

POUR comprendre l'article 65, il faut se rappeler les règles que M. le Marquis de l'Hôpital a données à l'article 6, & les calculs qu'il a faits sur la fin de l'article 7. Il faut encore se rappeler

ce que nous avons dit nous-mêmes dans les notes 3 & 4. Comme il s'agit cependant de mettre au fait les commençans du calcul des différences secondes, troisiemes &c. nous allons commenter l'article 65 avec toute l'étendue dont il pourra être susceptible; notre commentaire sera renfermé dans les réponses aux questions suivantes.

*Premiere Question.* Comment peut-on prouver, qu'en prenant  $dx$  pour constante, la différence de  $\frac{ydy}{dx}$  est  $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$  ?

*Réponse.* 1°. La différence de  $ydy$  est  $dy \times dy + yddy = dy^2 + yddy$ .

2°. La différence de la fraction  $\frac{ydy}{dx}$ , en supposant que  $dx$  est une grandeur constante, est  $\frac{dx \times dy^2 + dx \times yddy}{dx \times dx} = \frac{dy^2 + yddy}{dx}$ ; donc &c.

*Seconde Question.* Comment peut-on prouver que la différence de  $\frac{ydy}{dx}$  est  $\frac{dx dy^2 - ydy ddx}{dx^2}$ , en prenant  $dy$  pour une quantité constante ?

*Réponse.* 1°. Quoique  $dy$  soit constante,  $y$  est variable; la différence de  $ydy$  est donc  $dy \times dy = dy^2$ .

2°. La différence de  $dx$  est  $ddx$ .

3°. La différence de la fraction  $\frac{ydy}{dx}$ , en supposant  $dy$  constante, est  $\frac{dx \times dy^2 - ydy \times ddx}{dx \times dx} = \frac{dx dy^2 - ydy ddx}{dx^2}$ ; donc &c.

*Troisième Question.* Comment peut-on prouver que la différence de  $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$  est

$\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , en prenant  $dx$  pour une quantité constante.

*Réponse.* 1°. La différence de  $z$  multipliée par  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  & divisée par  $dx$  est  $\frac{dx \times dz \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \times dx}$   
 $= \frac{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ .

2°. La différence de  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , en supposant  $dx$  constant, est  $\frac{2dyddy}{2\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ ; donc la différence de  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  multipliée par  $z$  & divisée par  $dx$  sera  $\frac{dx \times z \times dyddy}{dx^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ .

3°. Pour avoir la différence de la fraction  $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ , il faut joindre les différences trouvées num. 1 & 2; donc la différence de la fraction proposée sera  $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , le tout divisé par  $dx$ .

4°.  $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dz \times \sqrt{dx^2 + dy^2} + zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , parce que  $\sqrt{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx^2 + dy^2$ ; donc la différence de la



fraction  $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$  sera  $\frac{dz \times \sqrt{dx^2+dy^2} + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$

$$= \frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

*Quatrième Question.* Comment peut-on prouver qu'en prenant  $dy$  pour constante, l'on aura  $\frac{dzdx^3 + dzdx dy^2 - zdy^2 ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$  pour la différence de

$$\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}.$$

*Réponse.* 1°. La différence de  $z$  multipliée par  $\sqrt{dx^2+dy^2} = dz\sqrt{dx^2+dy^2}$ .

2°. En supposant  $dy$  constant, la différence de  $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{2dx ddx}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ; donc cette même différence multipliée par  $z$  sera  $\frac{zdx ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ; donc la différence totale de

$$\begin{aligned} z\sqrt{dx^2+dy^2} &\text{ sera } dz\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{zdx ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \\ &= \frac{dz \times \sqrt{dx^2+dy^2} + zdx ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdx ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}. \end{aligned}$$

3°. La question seroit résolue, si on ne demandoit que la différence de  $z\sqrt{dx^2+dy^2}$ . Mais on

demande la différence de  $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$ , dans laquelle fraction on suppose  $dx$  variable. Qu'on se rappelle les règles qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de différencier une fraction, & l'on

l'on trouvera que la différence de la fraction  
proposée, est  $\frac{dx \times d\sqrt{dx^2 + dy^2} + d\sqrt{dx^2 + dy^2} \times dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - ddx \times$   
 $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , le tout divisé par  $dx^2 =$   
 $\frac{dx \times d\sqrt{dx^2 + dy^2} + d\sqrt{dx^2 + dy^2} \times dx - ddx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} =$   
 $\frac{d\sqrt{dx^2 + dy^2} + d\sqrt{dx^2 + dy^2} - ddx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$

4°. Otons les quantités qui se détruisent, nous  
aurons évidemment  $\frac{d\sqrt{dx^2 + dy^2} + d\sqrt{dx^2 + dy^2} - ddx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$  pour

- la différence de la fraction  $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$

*Cinquieme Question.* Comment peut-on prou-  
ver qu'en prenant  $dx$  pour constant, la différence  
de  $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$  doit être  $\frac{dx^2 dy^2 + dy^4 + ydx^2 ddy}{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}?$

*Réponse.* 1°. La différence de la quantité  $ydy$ ,  
solitairement prise, est  $dy^2 + yddy.$

2°. La différence de  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , est  $\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$   
en prenant  $dx$  pour constant.

3°. La différence de  $ydy$ , considéré comme nu-  
mérateur d'une fraction, est  $\frac{dy^2 + yddy}{dy^2 + yddy} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$-\frac{ydy \times dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ , le tout divisé par  $dx^2 + dy^2$ , quar-  
ré de  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; donc cette différence sera

$$\frac{dy^2 + yddy \times dx^2 + dy^2 - ydy^2 ddy}{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx^2 dy^2 + dy^4 + ydx^2 ddy}{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

Y

à cause des quantités qui se détruisent ; ce sont  
 $+ ydy^2ddy$  &  $- ydy^2ddy$ .

4°. On prouvera par un calcul semblable  
 qu'en prenant  $dy$  pour constant, la différence de

$$\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \text{ sera } \frac{dx^2dy^2 + dy^4 - ydydxddy}{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Sixieme Question. Comment peut-on prouver  
 que  $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{- dxddy}$  est égal à  $\frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{- dxddy}$  ?

$$\text{Réponse. } 1^\circ. \overline{dx^2 + dy^2} = \overline{dx^2 + dy^2}^1 = \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}.$$

$$2^\circ. \sqrt{dx^2 + dy^2} = \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}; \text{ donc la fraction}$$

$$\text{proposée devient } \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}}{- dxddy} = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{- dxddy}.$$

Septieme Quest. Comment peut-on prouver qu'en  
 prenant  $dx$  pour constant, la différence de  $\frac{dx^2 + dy^2^{\frac{3}{2}}}{- dxddy}$

$$\text{est } \frac{- 3dxddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}.$$

$$\text{Réponse. } 1^\circ. \text{ En prenant } dx \text{ pour constant, \&}$$

$$\text{en considérant } \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \text{ comme une quantité}$$

$$\text{isolée, sa différence est } \frac{1}{2} \times 2dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} -$$

$$= 3dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}.$$

2°. En prenant  $dx$  pour constant, & en consi-  
 dérant  $- dxddy$  comme une quantité isolée, sa  
 différence est  $- dxddy$ .

3°. En considérant ces deux quantités com-

me formant une fraction, leur différence sera

$$\frac{-dxddy \times 3dyddy \times \frac{1}{dx^2 + dy^2} + dxddy \times \frac{1}{dx^2 + dy^2}}{dx^2 ddy^2}$$

$$= \frac{-3dxddy^2 \times \frac{1}{dx^2 + dy^2} + dxddy \times \frac{1}{dx^2 + dy^2}}{dx^2 ddy^2}.$$

*Huitieme Question.* Comment peut-on trouver la différence seconde d'une quantité quelconque, élevée à une puissance quelconque; *par exemple*, quelle est la différence seconde de  $x^m$ , ou la différence premiere de  $mx^{m-1}dx$ ?

*Réponse.* La différence demandée est  $mm - mx^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$ . En voici la démonstration. Faisons  $x^{m-1} = y$ , &  $dx = z$ .

1°. Puisque  $x^{m-1} = y$ , l'on aura  $dy = m - 1x^{m-2}dx$ , parce que dans cette hypothèse la différence de  $y$  doit être égale à la différence de  $x^{m-1}$ .

2°. Puisque  $dx = z$  &  $x^{m-1} = y$ ; donc  $x^{m-1}dx = yz$ ; donc  $mx^{m-1}dx = myz$ ; donc la différence de  $mx^{m-1}dx$  est égale à la différence du produit  $myz$ , dans lequel  $m$  est une quantité constante qui n'a point de différence.

3°. La différence de  $myz$  est  $mzdy + mydz$ .

4°. Mettons à la place de  $z$  sa valeur  $dx$ , à la place de  $dy$  sa valeur  $m - 1x^{m-2}dx$ , & à la place de  $y$  sa valeur  $x^{m-1}$ , nous aurons  $mzdy = mdx \times m - 1x^{m-2}dx = mm - mx^{m-2}dx^2$ , parce que  $m \times m - 1 = mm - m$ , & que  $dx \times dx = dx^2$ ; nous aurons encore  $mydz = mx^{m-1}ddx$ ; donc  $mzdy + mydz = mm - mx^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$ .

Y 1

Mais le premier membre de cette dernière équation est évidemment la différence du produit  $myz$ , donc le second membre de la même équation sera évidemment la différence de  $mx^{m-1}dx$ , ou la différence seconde de  $x^m$ , parce que (num. 2)  $myz = mx^{m-1}dx$ .

*Corollaire.* La différence seconde de  $x^m$  est une véritable formule pour quiconque prend garde que  $m$  vaut 2, lorsque la grandeur qu'on veut différencier, est élevée au carré; que  $m$  vaut 3, lorsqu'il s'agit du cube, &c. La différence seconde de  $x^3$  sera donc  $9 - 3x^{3-2}dx^2 + 3x^{3-1}ddx = 6xdx^2 + 3x^2ddx$ ; celle de  $x^2$  sera  $4 - 2x^{2-2}dx^2 + 2x^{2-1}ddx = 2x^0dx^2 + 2x^1ddx = 2dx^2 + 2x^1ddx$ , parce que  $x^0 = 1$ , celle de  $x^4$  sera  $16 - 4x^{4-2}dx^2 + 4x^{4-1}ddx = 12x^2dx^2 + 4x^3ddx$ , &c.

## NOTE XLI.

VOICI comment on met en pratique les règles marquées dans l'art. 66, pag. 84. Pour trouver le point d'inflexion ou celui de rebroussement d'une courbe dont on a l'équation, 1°. L'on prend les différences premières de l'équation proposée, & l'on met dans un membre  $dy$  seule, & les autres quantités dans le second membre. Si l'on a, par exemple, l'équation  $axx = xxy + aay$ , l'on fera

$$y = \frac{axx}{xx + aa}, \text{ \& par conséquent } dy = \frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = \frac{2a^3xdx}{(xx + aa)^2}; \text{ \& voilà}$$

ce qu'on nomme la seconde équation.

2°. Il faut différencier cette seconde équation, en regardant  $dx$  comme constante, & l'on aura

$$ddy = \frac{2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3 x^4 dx^2 - 8a^5 xx dx^2}{\overline{xx + aa}^4} =$$

$$\frac{2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3 xx dx^2 \times \overline{xx + aa}}{\overline{xx + aa}^4}.$$

3°.  $ddy = 0$ ; donc la fraction qui répond à  $ddy$  sera  $= 0$ ; mais dans cette fraction, ce n'est pas le dénominateur  $\overline{xx + aa}^4$  qui est  $= 0$ , car cette fraction seroit infinie; donc ce sera son numérateur qui sera  $= 0$ ; donc l'on aura  $2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3 xx dx^2 \times \overline{xx + aa} = 0$ ; donc  $2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 = 8a^3 xx dx^2 \times \overline{xx + aa}$ ; donc, en divisant tout par  $2a^3 dx^2 \times \overline{xx + aa}$ , l'on aura  $xx + aa = 4xx$ ; donc  $3xx = aa$ ; donc  $xx = \frac{aa}{3}$ ; donc  $x = \sqrt{\frac{aa}{3}}$ ; donc  $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ . C'est ainsi qu'on opère, lorsque l'on fait  $ddy = 0$ .

4°. Lorsque  $ddy = 0$  ne mène à rien, l'on fait alors  $ddy = \infty$ ; & l'on calcule de la manière qui suit. L'on vous donne, par exemple, l'équation  $y - a = \overline{x - a}^{\frac{2}{5}}$ . Vous aurez d'abord  $dy = \frac{2}{5} \overline{x - a}^{-\frac{3}{5}} dx$   $= \frac{2}{5} \overline{x - a}^{-\frac{2}{5}} dx$ . Vous différencierez cette seconde équation, & vous aurez, en prenant  $dx$  pour constante,  $ddy = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \overline{x - a}^{-\frac{7}{5}} dx \times dx$   $= -\frac{6}{25} \overline{x - a}^{-\frac{7}{5}} dx^2 = \frac{-6 dx^2}{25 \sqrt[5]{x - a}^7}$ , parce que

$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-a}$  est évidemment égal à la fraction

$\frac{1}{x-a}$ , & que cette fraction n'est pas différente

de  $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$ .

5°. En supposant  $ddy = 0$ , l'on trouve  $-6dx^2 = 0$ . Mais cela ne mène à rien, donc il faut supposer  $ddy = \infty$ .

6°. En supposant  $ddy = \infty$ , l'on aura le dénominateur de la fraction qui lui répond  $= 0$ ; l'on aura donc  $25\sqrt{x-a} = 0$ ; donc  $x-a = 0$ ; donc  $x = a$ .

7°. Lorsque  $ddy = 0$ , l'on a le numérateur de la fraction qui lui répond  $= 0$ ; & lorsque  $ddy = \infty$ , l'on a le dénominateur de la même fraction  $= 0$ . C'est-là une règle qu'il ne faut jamais oublier.

8°. Voici comment M. Varignon démontre que lorsque la différence de AL (Fig. 52. Pl. 3, & Fig. 53. Pl. 4) est  $-\frac{yddy}{dy^2} = 0$ , elle est nécessairement

$ddy = 0$ . Dans la fraction  $-\frac{yddy}{dy^2}$ , ce n'est pas  $dy^2$  qui est 0, car cette fraction seroit infinie; ce n'est pas non plus  $+y$  ou  $-y$ , car ce sont des quantités réelles; c'est donc  $ddy$ . Le même Auteur paroît d'abord convenir avec M. le Marquis de l'Hôpital que, pour avoir le point d'inflexion, il faut faire  $ddy = 0$ , & que pour avoir le point de rebroussement, il faut faire  $ddy = \infty$ ; nous examinerons cette règle dans la Note 45<sup>e</sup>.

9°. Voici une occasion où  $AL$  devient  $x - \frac{ydx}{dy}$ , au lieu d'être  $\frac{ydx}{dy} - x$ . La soutangente  $LM$  (Fig. 63. Pl. 4) est suivant la coutume  $\frac{ydx}{dy}$ ; l'abscisse  $AM$  est  $x$ ; donc  $AL = AM - LM$  sera par la même  $x - \frac{ydx}{dy}$ . Jusqu'à présent M. le Marquis de l'Hôpital n'a parlé que des courbes dont les appliquées sont parallèles entr'elles. La règle que je vais commenter regarde les courbes dont les appliquées partent d'un même point; cette règle est  $yddy = dx^2 + dy^2$ .

10°. Pour comprendre cette règle, il faut d'abord bien se convaincre qu'à cause des angles infiniment petits  $HBT$  &  $MBm$  (Fig. 56. Pl. 4),  $BT$  peut être regardée comme parallèle à  $BH$ , &  $BM$  à  $Bm$ . L'on verra alors du premier coup d'œil que les triangles rectangles  $MRm$ ,  $MBT$ ,  $THO$  sont équiangles. Il faut encore bien se convaincre que  $MR : TH :: TH : HO$ ; M. Crouzas nous en donne la démonstration en cette manière. A cause des triangles semblables  $mRM$ ,  $HOT$ , l'on a  $mR : MR :: TH : HO$ , ou,  $dy : dx :: \frac{dx^2}{dy} : HO = \frac{dx^3}{dy^2}$ . Mais dans la proportion  $MR : TH :: TH : HO$ , l'on trouve  $HO = \frac{dx^3}{dy^2}$ ; donc cette proportion n'a rien d'imaginaire. Enfin il faut se rappeler que lorsque  $Oz$  s'évanouit, comme il arrive au point d'inflexion ou de rebroussement, l'on a

Y 4



$\frac{dx^3 + dx dy^2 - y dx ddy}{dy^2} = 0$  ; l'on a donc alors .

$$\frac{y dx ddy}{dy^2} = \frac{dx^3 + dx dy^2}{dy^2} ; \text{ donc } y dx ddy = dx^3 + dx dy^2$$

à cause du dénominateur commun ; donc , en divisant tout par  $dx$ , l'on aura  $y ddy = dx^2 + dy^2$ . Nous ferons remarquer dans les Notes suivantes l'usage qu'il faut faire de cette équation.

## NOTE XLII.

L'ARTICLE 67 , pag. 89 nous prouve que M. le Marquis de l'Hôpital pensoit que dans les courbes dont les appliquées sont parallèles , il falloit faire  $ddy = 0$ , pour avoir le point d'inflexion ; &  $ddy = \infty$  , pour avoir le point de rebroussement. Ce même Auteur pensoit encore que pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point , l'on a au point d'inflexion  $dx^2 + dy^2 - y ddy = 0$ , & au point de rebroussement  $dx^2 + dy^2 - y ddy = \infty$ . Nous allons voir dans les Notes suivantes ce qu'il faut penser de ces règles générales.

## NOTE XLIII.

LES équations de l'article 68 , pag. 90 ont été calculées dans la Note 41, num. 1. 2. 3.

## NOTE XLIV.

LES équations de l'article 69 , pag. 91 ont été calculées dans la Note 41, num. 4. 5. 6.

## NOTE XLV.

POUR comprendre l'article 70, pag. 92, il faut d'abord relire les Notes 11 & 12. Cette lecture vous convaincra que la demi-circonférence ADB (Fig. 59. Pl. 4.) : à la demi-base BK :: la coupée AD : à l'appliquée DF, donc  $DF = \frac{bu}{a}$ . Mais  $DF = EF - ED = y - z$ ; donc  $y - z = \frac{bu}{a}$ , donc  $y = z + \frac{bu}{a}$ .

Il faut ensuite former mentalement un triangle des *différences infiniment petites* de AE, de ED & de AD; & l'on verra que la *différence* de AD deviendra la base d'un triangle rectangle qui aura pour ses deux côtés les *différences* de AE & de ED; donc  $du^2 = dx^2 + dz^2$ ; donc  $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ . Ainsi à l'article 70,  $du (\sqrt{dx^2 + dz^2})$  signifie  $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ , & non pas  $du \times \sqrt{dx^2 + dz^2}$ .

Il faut enfin bien se convaincre que si  $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ , l'on aura  $du = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$ . En

voici le calcul :  $dz^2 = \frac{c^2 dx^2 - 2cxdx^2 + x^2 dx^2}{2cx - xx}$ ;

donc  $dz^2 + dx^2 = \frac{c^2 dx^2 - 2cxdx^2 + x^2 dx^2}{2cx - xx} + dx^2$ ;

& en mettant  $dx^2$  sous le dénominateur  $2cx - xx$ , & ôtant ensuite les quantités qui se détruisent,

l'on trouvera  $dz^2 + dx^2 = \frac{c^2 dx^2}{2cx - xx}$ ; donc

$$\sqrt{dz^2 + dx^2} = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}; \text{ donc } du = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}.$$

Le reste de l'article 70 n'a besoin d'aucun éclaircissement particulier.

C'est ici que M. Varignon a remarqué qu'en faisant  $ddy = \infty$ , l'on avoit par là même  $\frac{2cx - xx}{x} \times \sqrt{2cx - xx} = 0$ ; donc  $2cx \times \sqrt{2cx - xx} = xx \times \sqrt{2cx - xx}$ ; donc  $2cx = xx$ ; donc  $2c = x$ . Il conclut de-là que  $ddy = \infty$ , n'est pas une marque sûre du point de rebroussement, puisque la roulette allongée n'est pas une courbe rebroussee. M. Varignon a raison, & M. de l'Hôpital n'a pas tort. Pour les accorder ensemble, il me paroît qu'il faut présenter ainsi la règle générale :  $ddy = \infty$  est une marque sûre du point de rebroussement, lorsque  $ddy = 0$  n'a donné aucune valeur. Mais  $ddy = \infty$  n'est pas une marque de rebroussement, lorsque  $ddy = 0$  a donné quelque chose. Or dans le cas présent  $ddy = 0$  a donné  $x = c + \frac{ac}{b}$ ; donc dans le cas présent  $ddy = \infty$  peut donner une valeur de  $x$ , sans indiquer cependant aucun rebroussement dans la roulette allongée.

#### NOTE XLVI.

**A**VANT que de lire l'article 71, pag. 93, il faudra relire auparavant la Note 15 dans laquelle se trouve expliquée la nature de la conchoïde. Vous chercherez ensuite la différence de  $\frac{b + x\sqrt{aa - xx}}{x}$ ; vous trouverez  $\frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$ .

M. le Marquis de l'Hôpital la suppose telle ,  
 puisqu'il lui assigne pour *différence seconde*

$$\frac{2a^4b - aax^3 - 3aabxx \times dx^2}{aax^3 - x^5 \times \sqrt{aa - xx}}$$

C'est donc ou une inattention , ou une faute d'impression qui a fait donner le signe + à un numérateur dont les deux termes doivent être affectés du signe — . Cette *seconde différence* vous donnera l'équation incomplète du troisieme degré  $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$ . Pour mettre cette équation en état d'être calculée , vous ferez évanouir le second terme , en supposant par la règle ordinaire  $x = y - b$  , & vous aurez pour votre équation transformée  $y^3 - 3bby + 2b^3 - 2aab$ . Vous ferez  $-3bb = -p$  , &  $+2b^3 - 2aab = -q$  , & vous aurez  $y^3 - py - q = 0$  , équation du troisieme degré qui se trouve calculée dans tous les Livres élémentaires d'algèbre , & nommément dans *notre Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des leçons élémentaires de M. l'Abbé de la Caille* , pag. 32 & suivantes.

La seconde maniere dont M. le Marquis de l'Hôpital résout le même problème , apprend à un Commençant à se servir de la formule  $ydy = dx^2 + dy^2$ . Les calculs ne demandent qu'un peu d'attention , & l'on parvient comme naturellement à l'équation du 3<sup>e</sup> degré  $zx^3 - 3bbx - abb = 0$ . Cette équation se change en celle-ci ,

$$x^3 - \frac{3bb}{2}x - \frac{abb}{2} = 0. \text{ Vous faites } -\frac{3bb}{2} = -p ,$$

$$\& -\frac{abb}{2} = -q , \& \text{ vous avez } x^3 - px - q = 0 ,$$

NOTE XLVII.

L'ARTICLE 72, pag. 95 a besoin, pour être compris, des remarques suivantes.

$$1^0. y = b + x \sqrt{\frac{a-x}{x}}; \text{ donc } y = b \times \sqrt{\frac{a-x}{x}} + x \times \sqrt{\frac{a-x}{x}}. \text{ Mais } x \times \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{\frac{axx - x^3}{x}} = \sqrt{ax - xx}; \text{ donc } y = b \sqrt{\frac{a-x}{x}} + \sqrt{ax - xx}.$$

2<sup>0</sup>. Pour trouver facilement la différence de cette dernière valeur de  $y$ , souvenez-vous d'abord que  $b \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{\frac{abb - bbx}{x}}$ , parce que le dénominateur  $x$  est aussi bien affecté du signe radical, que le numérateur  $a - x$ . Souvenez-vous ensuite que la différence de  $\sqrt{\frac{abb - bbx}{x}}$

$$\text{est } \frac{-bbdx \times \sqrt{x}}{2\sqrt{abb - bbx}} - \frac{dx \times \sqrt{abb - bbx}}{2\sqrt{x}}, \text{ le tout divisé par } x. \text{ Réduisez ces deux fractions à un même dénominateur, \& ôtez les quantités qui se détruisent, vous aurez } \frac{-2abbdx}{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{abb - bbx}}, \text{ le tout divisé par } x.$$

Vous aurez donc  $\frac{-2abbdx}{4x \sqrt{abbx - bbxx}}$ . Mais cette der-

niere fraction est égale à  $\frac{-abdx}{2bx\sqrt{ax-xx}} = \frac{-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ ;

donc la différence de  $b\sqrt{\frac{a-x}{x}}$  est  $\frac{-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ .

3°. Ajoutez à cette différence celle de  $\sqrt{ax-xx}$ , c'est-à-dire  $\frac{adx - 2x dx}{2\sqrt{ax-xx}} = \frac{ax dx - 2xx dx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ ; & vous trouverez, aux signes près, la même chose que M. le Marquis de l'Hôpital, c'est-à-dire,  $\frac{ax dx - 2xx dx - abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ . Ce n'est qu'en conservant

cés derniers signes, que vous parviendrez à la *seconde différence*, telle qu'elle est marquée dans *l'Analyse des Infiniment Petits*. Aussi ne voyons-nous pas pourquoi M. le Marquis de l'Hôpital n'a pas conservé les signes qui se présentoient naturellement. C'est ici le lieu de relever une faute qui s'est glissée dans les deux éditions, & qu'il est difficile de regarder comme une faute d'impression. M. le Marquis de l'Hôpital divisa d'abord  $3aab - aax - 4abx \times dx^2$  par  $4ax - 4x^2 \times \sqrt{ax-x^2}$ ; & il avertit à la fin de son Ouvrage qu'il le falloit diviser par  $4ax - 4x^2$ . Il ne faut faire ni l'un ni l'autre. Le vrai diviseur est  $4axx - 4x^3$ , parce que le quarré de  $2x\sqrt{ax-xx}$  est évidemment  $4ax^2 - 4x^4$ , & non pas  $4axx - 4x^3$ , comme l'assure M. Crouzas. Mais la faute que nous relevons ici, ne peut conduire dans aucune erreur, puisque c'est le numérateur de la fraction que l'on fait  $= 0$ . Nous aurions pu la corriger dans cette

troisième édition. Mais nous nous sommes fait une loi inviolable de ne rien changer au texte de M. le Marquis de l'Hôpital.

## NOTE XLVIII.

L'ARTICLE 73, *pag.* 97 est terminé par une équation du cinquième degré. L'on n'a qu'à exprimer en chiffres les valeurs de  $a$  & de  $b$ ; & alors cette équation ne sera pas bien difficile à résoudre. Si l'on suppose, *par exemple*,  $a = 2$ , &  $b = 2$ , l'équation proposée se changera en celle-ci,  $y^5 - 6y^4 + 12y^3 - 8y^2 + 12y - 16 = 0$ ; & cette équation se résoudra par la seconde des méthodes que donne M. l'Abbé de la Caille dans ses *Elémens de Mathématique*, *pag.* 89 & 90, parce que dans cette supposition  $y$  est égal à un nombre entier joint à une fraction.

## NOTE XLIX.

L'ARTICLE 74, *pag.* 98 a besoin des trois éclaircissemens suivans.

1°.  $FB = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ ; en voici le calcul.

A cause du triangle rectangle FEB, *Fig.* 64. *Pl.* 4, l'on a  $FB^2 = EF^2 + EB^2$ ; donc  $FB^2 = yy + \frac{yydx^2}{dy^2} = \frac{yydy^2 + yydx^2}{dy^2} = \frac{yy \times dx^2 + dy^2}{dy^2}$ ; donc

$$FB = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}.$$

2°. A cause de l'équation à la courbe, l'on aura

$\frac{mydy}{nx} = \frac{nx dy - ny dx}{my}$ . En effet, l'équation à la courbe donne  $m : n :: xdy - ydx : y\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ; donc  $my\sqrt{dx^2 + dy^2} = nx dy - ny dx$ ; donc  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{nx dy - ny dx}{my}$ . Mais  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{mydy}{nx}$ ; donc  $\frac{mydy}{nx} = \frac{nx dy - ny dx}{my}$ .

3°. Pour trouver  $y\sqrt{mm - nn} = nx$ , voici les opérations qu'il faut faire. 1°. Divisez par  $dy$  l'équation  $\frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxdy - mmyydy}{nnxy}$ ;

vous aurez  $\frac{\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxx - mmyy}{nnxy}$ .

2°. Multipliez cette dernière équation par  $nx$ , & ôtez les quantités qui se détruisent, vous aurez

$\sqrt{mmyy - nnxx} = \frac{nnxx - mmyy}{ny}$ ; donc

$ny\sqrt{mmyy - nnxx} = nnxx - mmyy$ ; donc

$\sqrt{m^2n^2y^4 - n^4x^2y^2} = nnxx - mmyy$ ; donc

$-n^4x^2y^2 + m^2n^2y^4 = \overline{nnxx - mmyy}^2$ ; donc, en

divisant tout par,  $n^2x^2 - m^2y^2$ , l'on aura  $-n^2y^2$

$= n^2x^2 - m^2y^2$ ; donc  $y^2 \times mm - nn = nnxx$ ;

donc  $y\sqrt{mm - nn} = nx$ .

*Remarque.* Ceux qui nous ont suivi jusqu'à présent, sont en état de lire sans guide, à quelques points près, les 6 dernières Sections de l'Analyse des Infinitement Petits. Ce sont ces quelques points que l'on trouvera éclaircis dans les 6 Notes suivantes.



## NOTE L.

**L**A Section 5<sup>e</sup>, contient 34 articles. Ceux qui se rappellent nos notes 5, 7, 11, 12, 23, 24 & 40, ne peuvent être arrêtés que dans la lecture des articles 77, 79, 84, 86, 87, 89, 90, 93, 101, 103, 105, & 109. Voici l'explication de ce qu'il y a de plus difficile dans ces 12 articles.

1<sup>o</sup>. L'on assure sur la fin de l'article 77 que  $z = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ . Pour trouver cette valeur, il faut manier suivant les règles ordinaires l'équation  $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-yddy} \times \frac{ydy - zdy}{y}$ .

2<sup>o</sup>. Pour trouver, au commencement de l'article 79, la valeur de R G (*Fig. 67, Pl. 4*), l'on dira, MR : mR :: mR : R G.

3<sup>o</sup>. La valeur de P T (*Fig. 72. Pl. 4*) est en général  $\frac{ydx}{dy}$ . Cette valeur devient 2x dans la parabole dont il s'agit à l'article 84, parce que dans cette parabole l'on a  $x = \frac{yy}{a}$ , &  $dx = \frac{2ydy}{a}$ . Dans cette même parabole l'on a P Q =  $\frac{1}{2}a$ , parce qu'on a démontré (article 79) que P Q =  $\frac{ydy}{dx}$ .

4<sup>o</sup>. En lisant l'article 86, l'on pourra demander comment se sont trouvées les valeurs de EC, de MS & de TQ (*Fig. 74, Pl. 4*). L'on aura la valeur de EC, en imaginant, suivant la coutume,

un

un triangle infiniment petit dont les deux côtés soient  $dx$ ,  $dy$ , & qui soit équiangle au triangle MEC. L'on dira alors  $dx : dy :: ME : EC$ .

Pour avoir la valeur de MS, vous direz, à cause de l'angle droit MTS,  $MP : PT :: PT : PS$ .

Enfin pour avoir la valeur de TQ, vous direz, à cause de l'angle droit TMQ,  $PT : PM :: PM : PQ$ . Il n'est pas nécessaire d'avertir que  $PM = y$ ,

$$\& PT = \frac{y dx}{dy}.$$

5°. L'article 87 auroit besoin d'un éclaircissement qui eut rapport à la *différence seconde* de  $y^m$ , si cette *différence seconde* n'eût pas été calculée sur la fin de la 40°. note. Il y a encore sur la fin de cet article une phrase dont le sens ne se présente pas tout de suite. La voici. *Ou m est moindre que 2, & alors l'exposant de y étant positif, elle se trouvera dans le numérateur, &c.* Pour que cette phrase & quelques autres suivantes aient la clarté requise dans les ouvrages de Mathématiques, il faut dire : *l'appliquée y se trouvera dans le numérateur, &c.*

6°. L'ellipse dont il s'agit à l'article 89, a évidemment pour petit axe  $\sqrt{ab}$ , parce que son grand axe est  $a$ , & le paramètre de ce grand axe est  $b$ . Pour avoir le paramètre de  $\sqrt{ab}$ , il faut dire,  $\sqrt{ab} : a :: a : \text{au paramètre du petit axe}$ ; donc le paramètre du petit axe est  $\frac{aa}{\sqrt{ab}} = \frac{aa\sqrt{ab}}{\sqrt{ab} \times \sqrt{ab}} = \frac{aa\sqrt{ab}}{ab} = \frac{a\sqrt{ab}}{b}$ .

Z

7°. Pour trouver, à l'article 90, la valeur de EC, vous direz d'abord  $PT(a) : PM(y) :: PM(y) : PQ = \frac{yy}{a}$ . Vous direz ensuite  $PM : PQ :: ME : EC$ .

8°. L'article 93 a besoin des éclaircissemens suivans. 1°. Pour trouver  $du = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ , il faut imaginer proche du point E, Fig. 83. Pl. 5, un triangle rectangle infiniment petit, semblable au triangle rectangle EPK, dont le côté  $dx$ , différence de AP, & la base  $du$ , différence de l'arc AE, soient homologues à EP & EK. L'on dira alors  $EP(\sqrt{2ax - xx}) : EK(a) :: dx : du$ . 2°. Pour trouver  $dy = dx \frac{\sqrt{2a - x}}{\sqrt{x}}$ , l'on a divisé par  $\sqrt{2a - x}$  le numérateur & le dénominateur de la fraction  $\frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ . 3°. On aura la valeur de BE en faisant  $BE' = AB' - AE'$ . 4°. C'est au point A qu'on a  $x = 0$ ; & c'est au point B qu'on trouve  $x = 2a$ .

9°. Pour comprendre la dernière conséquence de l'article 101, il faut se rappeler que la portion de la roulette AM n'est que la somme des arcs infiniment petits  $Mm$ , & que la corde AF n'est que la somme des EF.

10°. On avance, à l'article 103, que l'espace RGBQ (Fig. 87, Pl. 5) est égal à l'espace MGBE. L'on a raison, puisqu'on a démontré dans la figure 84 de la même planche que l'arc MR = l'arc EQ,

par la même que l'angle  $\text{MOK} = \text{l'angle ECK}$ .

Pour trouver , à la fin du même article ,  $zz = 2aa + 2ab + bb$  , il faut que l'arc  $\text{MEQ}$  , ( *Fig. 87 , Pl. 5* ) coupe en 2 parties égales le demi-cercle  $\text{AEB}$  au point  $\text{E}$ . Alors l'angle  $\text{EKO}$  sera droit ; & en tirant le rayon  $\text{OE} = \text{OQ} = z$  , l'on aura  $\text{OE}^2 = \text{EK}^2 + \text{OK}^2$  ; donc  $zz = aa + aa + 2ab + bb$  ; donc  $zz = 2aa + 2ab + bb$ .

11°. Pour trouver , à l'article 105 ,  $x = \frac{1}{2}a$  , il faut se rappeler que  $xx$  étant nul vis-à-vis  $2bx$  , &  $2aa$  vis-à-vis  $3ab$  , il reste  $2bx = 3ab$  , & par conséquent  $x = \frac{1}{2}a$ . Il faut encore se rappeler qu'en faisant  $\text{BP} = \frac{1}{4}\text{AB}$  , l'on fait par là même  $x = \frac{1}{2}a$  , parce que  $\text{BP} = x$  , &  $\text{AB} = 2a$ .

12°. Pour peu qu'on réfléchisse sur la figure 91 citée à l'article 109 , l'on verra que la courbe  $\text{DE}$  est formée par le développement de la convexité  $\text{AD}$  ; la courbe  $\text{EF}$  par le développement de la convexité  $\text{AB}$  ; & la courbe  $\text{DG}$  par le développement de la convexité  $\text{DC}$ .

## NOTE LI.

IL y a dans la sixième section quelques articles qui nous ont paru mériter quelques éclaircissements. Ce sont les articles 110 , 113 , 118 , 119 , 120 , 121 , 123 & 125.

1°. L'angle de réflexion  $\text{FmD}$  ( *Fig. 94. Pl. 5 , art. 110* ) est égal à l'angle d'incidence  $\text{BmM}$  , & par conséquent à l'angle  $\text{RmM}$ .

2°. L'article 113 est un des plus importants du Traité des Infiniment Petits. Il sert à démontrer

que l'image d'un objet vû par le moyen d'un miroir, ne paroît pas toujours au point de concours de la cathète d'incidence & du rayon réfléchi ; cela n'est exactement vrai que pour les miroirs plans ; pour les autres il souffre bien des exceptions. Soit, *par exemple*, le miroir concave AMD, (Fig. 97, Pl. 5). Soient les deux rayons de lumière infiniment près l'un de l'autre BM, Bm envoyés par le point B sur la concavité de ce miroir, & réunis au point F après la réflexion. Il est évident que ces deux rayons donneront, après leur réflexion, l'image de l'objet B au point F ; s'ils la donnoient ailleurs, *par exemple*, à leur point de concours avec la cathète d'incidence, l'on auroit deux images de l'objet B ; donc &c. Ce que l'on peut avancer en général pour toute sorte de miroirs, c'est que le lieu de l'image est toujours au point F où deux rayons incidents infiniment proches l'un de l'autre BM, Bm viennent se couper après la réflexion.

3<sup>o</sup>. L'on assure (art. 118) que lorsque MF est infini, l'on a  $ME = 2MB$  (Fig. 98 Pl. 5) ou  $a = 2y$ . L'on a raison. La valeur de MF est (art.

113)  $= \frac{ay}{2y - a}$ . Lorsque MF est infini, l'on a

$MF = \frac{ay}{0}$  ; donc dans ce cas l'on a  $2y - a = 0$  ;

donc  $2y = a$ . Pour trouver la proportion indiquée à la fin de ce même article, il faut dire, la moitié du grand axe : au rayon incident :: le rayon réfléchi : ME. Or par là même que les rayons

incident & réfléchi sont donnés, le grand axe l'est aussi. Car dans la figure 99 de la planche 5, l'on a  $AD = BM + MF$ ; & dans la figure 100 de la planche 6, l'on a  $Aa = MF - MB$ , parce que les rayons incidens & réfléchi sont tirés des deux foyers à un même point de la courbe elliptique ou hyperbolique.

4°. L'article 119 a besoin des éclaircissemens suivans. L'on demande 1°. Pourquoi  $MF = \frac{1}{2} MG$ , lorsque les rayons incidens  $PM$  sont perpendiculaires sur l'axe  $AP$ , (*Fig. 101 Pl. 6.*). L'on répond que lorsque les rayons incidens  $PM$  sont perpendiculaires sur l'axe  $AP$ , ils sont par là même parallèles entr'eux; & puisqu'alors l'on a eu (*art. 113*)  $MF = \frac{1}{2} MG$ ; l'on doit avoir (*art. 119*); en faisant la même supposition,  $MF = \frac{1}{2} MG$ .

L'on demande 2°. Si la construction abrégée dont parle M. le Marquis de l'Hôpital, est préférable à celle qu'il donne d'abord. L'on peut répondre hardiment que non. Cette construction n'est bonne que pour ceux qui voudroient s'épargner la peine de chercher le rayon de la développée de la parabole. Ce rayon se trouve très-facilement par l'article 84.

L'on demande 3°. Pourquoi, lorsque le rayon réfléchi est parallèle à l'axe, l'on a  $MP = PQ$  (*Fig. 101. Pl. 6.*). Pour répondre à cette question, l'on n'a qu'à démontrer que dans la même figure l'on a  $ML = LQ$ . En effet l'angle  $QMA =$  l'angle  $QMD$ , puisque ce sont les deux angles droits formés par le rayon  $MC$  de la développée avec la

courbe AMD. De plus, l'angle d'incidence AML est égal à l'angle de réflexion NMD ; donc l'angle restant LMQ est égal à l'angle restant QMN. Mais à cause des parallèles MN, AO, l'on a  $LQM = QMN$  ; donc  $LMQ = LQM$  ; donc les angles sur la base MQ sont égaux ; donc  $ML = LQ$ . Pour trouver  $dy = dx$ , il faut imaginer au point M un triangle infiniment petit, semblable au triangle isocèle MLQ dont les 2 côtés  $dy$ ,  $dx$  soient homologues aux deux côtés ML, LQ.

L'on demande 4°. comment  $\sqrt{u - yy}$  divisé par  $t + y$  donne  $\frac{\sqrt{t - y}}{\sqrt{t + y}}$ . L'on répond que  $\frac{\sqrt{u - yy}}{t + y}$

$$= \frac{\sqrt{t - y \times t + y}}{\sqrt{t + y \times t + y}} = \frac{\sqrt{t - y}}{\sqrt{t + y}}.$$

Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que l'on trouve  $dy^2 - 2yddy = dx^2$ , en maniant suivant les règles ordinaires

$$\text{l'équation } \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}.$$

Il n'est pas plus nécessaire de faire remarquer que l'équation  $zz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}uu + \frac{1}{4}u$  que l'on trouve sur la fin de l'article 119, n'est pas différente de l'équation  $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{1}{4}aa u$ , parce que  $a = 1$ . Ce n'est que par la loi des homogènes qui exige que tous les termes de l'équation aient les mêmes dimensions, que l'on a fait entrer tantôt  $a$ , & tantôt  $aa$  dans l'équation primitive.

5°. Pour comprendre l'article 120, on fera attention à ce qui suit. 1°. Une perpendiculaire tirée du point C sur le rayon MF prolongé (Fig.

102, Pl. 6) couperoit ce rayon réfléchi dans un point où il seroit égal à la ligne appelée  $a$  à l'article 113, comme il est aisé de s'en convaincre en examinant la figure 97 de la planche 5; donc une perpendiculaire tirée du milieu de  $MC$  sur le rayon réfléchi  $MF$  rencontrera ce rayon dans un point où il sera égal à  $\frac{1}{2}a$ , c'est-à-dire, le rencontrera au point  $F$ ; car  $MF = \frac{1}{2}a$ , lorsque les rayons incidens  $PM$  sont perpendiculaires sur l'axe, comme nous venons de le remarquer au *num.* précédent de cette note. 2°. Si  $MF = \frac{1}{2}a$ , l'on aura  $MF = \frac{1}{2}MP$ , parce que la ligne  $MP$  de la figure 102 représente la ligne  $ME$  ou la ligne  $a$  de la figure 97. 3°. Pour se convaincre que la caustique  $AF$  est triple de  $MF$ , il faut se rappeler que  $AF$  (*art.* 110)  $= PM + MF$ . Or  $PM = 2MF$ ; donc  $AF = 3MF$ . 4°. Si l'angle  $ACM$  ou  $PCM$  est de  $45^\circ$ , l'angle d'incidence  $PMC$  sera de  $45^\circ$ ; donc l'angle de réflexion  $CMF$  sera de  $45^\circ$ ; donc l'angle total  $PMF$  sera droit, & par conséquent  $MF$  sera parallèle à  $AC$ .

6°. On peut demander en lisant l'article 121, pourquoi  $KD = \frac{1}{3}AD$  (*Fig.* 103, Pl. 6). Pour répondre à cette question, on fera remarquer que lorsque  $AD$  est le rayon incident, alors  $DK$  est le rayon réfléchi. Or de même que  $MF$  est  $\frac{1}{3}AM$ , de même  $DK$  est  $\frac{1}{3}AD$ . On peut encore demander pourquoi  $MF$  est parallèle à  $AD$ , lorsque  $AM$  est égal à  $AC$ . L'on répondra que lorsque  $AM = AC$ , alors le triangle  $ACM$  est équilatéral; donc chacun de ses angles vaut 60 de-



grés ; donc l'angle de réflexion  $CMF$  nécessairement égal à l'angle d'incidence  $AMC$ , vaudra 60 degrés ; donc les angles alternes  $ACM$ ,  $CMF$  seront égaux ; donc les lignes  $AD$ ,  $MF$  seront parallèles.

7°. L'article 122 n'a besoin d'aucun commentaire. Il n'en est pas ainsi de l'article 123. En le lisant, on se souviendra d'abord que  $MG$ , (*Fig. 105. Pl. 6*) est une partie du rayon de la développée, laquelle partie est parallèle & égale à  $NB$ , & que pour trouver  $MF = MQ = PN$ , il faut imaginer une perpendiculaire tirée du point  $G$  au point  $F$ , pour avoir le triangle rectangle  $MF G$  égal au triangle rectangle  $MQ G$ , à cause du côté commun  $MG$  & de l'angle de réflexion  $GMF$  égal à l'angle d'incidence  $GMP$ . On se souviendra ensuite que si le rayon incident  $PM$  partoît du centre  $C$  du cercle  $ANB$ , l'on auroit l'angle d'incidence  $PMG$  de 45 degrés, à cause du triangle rectangle isoscèle  $BPN$ . On se souviendra encore que, par la nature de la roulette, l'on a  $LI = AI$ , & que pour trouver  $du = \frac{adx}{y}$ , il faut imaginer près du point  $I$  un triangle rectangle infiniment petit, semblable au triangle rectangle  $CHI$ , dont la différence de  $AI$  & la différence de  $IH$  seront en proportion avec  $CI$  &  $IH$ . L'on aura donc  $du : dx :: a : y$  ; donc  $du = \frac{adx}{y}$ . L'on se souviendra enfin que la nature du cercle donne  $AH : IH :: IH : HB$ , ou,  $yy = 2ax - xx$  ; donc  $2ydy$

$$= 2adx - 2xdx ; \text{ donc } - 2ydy = 2xdx - 2adx.$$

Les défauts de proportion qui se trouvent dans la figure 105 , se corrigent d'eux-mêmes, & ne sçauroient induire dans aucune erreur.

8°. L'article 124 se présente de lui-même. Pour comprendre facilement l'article 125 , il faut relire l'article 100 dans lequel  $GC = \frac{b}{2a + b} MG$ . A

l'article 125 l'on a  $b = a$  à cause de l'égalité des cercles mobile & immobile ; l'on aura donc  $GC$

$$= \frac{b}{3b} MG, \text{ ou } GC = \frac{1}{3} MG \text{ (Fig. 106. Pl. 6).}$$

Les autres articles de la 6<sup>e</sup>. section ne sont ni assez intéressants , ni assez difficiles pour mériter un commentaire.

## NOTE LII.

DANS la section 7<sup>e</sup>. M. le Marquis de l'Hôpital se sert du calcul des *différences* pour trouver les caustiques par réfraction. Il suppose que celui qui en entreprend la lecture , est au fait de ce qui arrive à la lumière , lorsqu'elle traverse les verres convexes & concaves. Nous le supposons aussi dans cette note. Ce qui nous engage à supprimer une pareille dissertation , c'est que nous avons déjà traité cette matière aux articles de notre Dictionnaire de Physique qui commencent par les mots *Réfraction*, *Dioptrique*, *Lunette*, *Microscope* & *Telescope*. Cette note ne roulera donc que sur les articles 135, 136, 137, 139, 141, 142 & 144 ; ce sont les seuls qui aient besoin de quelques éclaircissements.

1°. Pour comprendre la fin de l'article 135, vous remarquerez ce qui suit. 1°.  $m$  est infinie par rapport à  $n$ , lorsque  $n = 0$ . 2°. L'on a  $n = 0$ , lorsqu'il n'y a point de réfraction, c'est-à-dire, lorsque le rayon incident  $BM$  (Fig. III, Pl. 6) est perpendiculaire à la courbe AMD. 3°. Lorsque le rayon incident  $BM$  est perpendiculaire à la courbe AMD, il doit, après avoir traversé cette courbe, se confondre avec  $MC$ , perpendiculaire à  $AMD$ . 4°. Lorsque  $m$  est infinie par rapport à  $n$ , l'on a  $MF = b$ , parce que la formule  $MF = \frac{bbmy}{bmy - amy - aan}$  devient évidemment  $MF = \frac{bbmy}{bmy} = b$ .

2°. M. le Marquis de l'Hôpital suppose que celui qui lira l'article 136, a présent à l'esprit ce qui arrive à un rayon de lumière qui passe obliquement, tantôt d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense, tantôt d'un milieu plus dense dans un milieu plus rare. Dans le premier cas  $m$  est plus grand que  $n$ ; dans le second c'est  $n$  qui est plus grand que  $m$ .

3°. En lisant l'article 137, vous-vous souviendrez de ce qui suit. 1°. Lorsque les rayons incidents  $BM$  ( $y$ ) sont parallèles entr'eux, alors ils sont infinis; donc la formule  $MF = \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$  devient, à cause du terme infiniment petit  $\mp bn$ ,  $MF = \frac{bmy}{my - ny} = \frac{bm}{m - n}$ . 2°. Lorsque les droi-

tes  $a$  &  $b$  sont infinies, alors les termes  $bmy$ ,  $any$  sont nuls par rapport aux termes  $aan$ ,  $bbmy$ , parce que ceux-ci sont des infinis du second genre, & ceux-là ne sont que des infinis du premier genre.

4°. L'article 139 demande, pour être compris, les remarques suivantes. 1°. Dans la figure 115 DN est par rapport à BD ce que dans la figure 111 MG ( $b$ ) est par rapport à BM. 2°. La caustique entiere  $HFN = AH - DN - \frac{2}{3} AC$ . Mais  $AH = \frac{2}{3} AC$ , donc  $HFN = \frac{2}{3} AC - \frac{2}{3} AC - DN = -\frac{2}{3} AC - DN$ . Mais  $DN^2 = CD^2 - CN^2 = CD^2 - \frac{4}{9} CD^2$ , puisque par hypothèse  $CN = \frac{2}{3} CD$ ; donc  $DN^2 = \frac{5}{9} AC^2$ ; donc  $DN = \frac{1}{3} AC \sqrt{5}$ ; donc si l'on a  $HFN = \frac{2}{3} AC - DN$ , l'on aura par là même  $HFN = \frac{2}{3} AC - \frac{1}{3} AC \sqrt{5} = \frac{2-\sqrt{5}}{3} AC$ . Tout ce calcul se rapporte à la caustique HFN de la figure 115. 3°. Pour ce qui regarde la caustique HFN de la figure 116, vous trouverez  $HFN = \frac{2-\sqrt{5}}{3} AC$ , en vous rappelant que  $NK = \frac{2}{3} AC$ , & que la caustique  $HFN = 2 AC + \frac{1}{3} AK$ . En effet,  $CK^2 = CN^2 - NK^2 = AC^2 - NK^2 = AC^2 - \frac{4}{9} AC^2 = \frac{5}{9} AC^2$ ; donc  $CK = \frac{1}{3} AC \sqrt{5}$ ; donc  $AK = AC - CK = AC - \frac{1}{3} AC \sqrt{5}$ , donc  $\frac{1}{3} AK = \frac{1}{3} AC - \frac{1}{9} AC \sqrt{5} = \frac{1}{3} AC - \frac{1}{9} AC \sqrt{5}$ . Mais la caustique  $HFN = 2 CA + \frac{1}{3} AK$ ; donc  $HFN = \frac{2}{3} AC + \frac{1}{3} AC - \frac{1}{9} AC \sqrt{5} = \frac{2}{3} AC - \frac{1}{9} AC \sqrt{5} = \frac{2-\sqrt{5}}{3} AC$ .

5°. L'article 141 suppose que l'on a présent à l'esprit l'article 132. Il suit de ce dernier article

que  $BM - BA : LM :: m : n$ . Mais l'on a dans la figure 118  $PM = BM - BA$ , &  $AE = LM$ ; l'on aura donc  $PM : AE :: m : n$ .

6°. A la fin de l'article 142, il est parlé des ovales de Descartes. Cette matiere est traitée dans la section seconde du livre 2 de la Géométrie. Voyez-en le Commentaire qu'en a fait le P. Rabuel Jésuite, pag. 340 & suivantes.

7°. Pour comprendre la bonté de l'équation  $NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC$  de l'article 144, il faut la transformer en celle-ci,  $FH = HD - NF + \frac{n}{m} NC - \frac{n}{m} DC$ , & se rappeler ensuite l'équation de l'article 132, où l'on lit  $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$ . Il faut encore avoir en même tems sous les yeux les figures 121 & 112, parce que  $HD$  est pour la figure 121 ce qu'est  $AH$  pour la figure 112. Il en est de même de  $NF$ ,  $\frac{n}{m} NC$ ,  $\frac{n}{m} DC$ ; ils sont dans la figure 121 ce que sont dans la figure 112  $MF$ ,  $\frac{n}{m} BM$ ,  $\frac{n}{m} BA$ .

#### NOTE LIII.

**L**A Section 8<sup>e</sup>. contient 11 articles qu'il est nécessaire de commenter; ce sont les articles 147, 148, 151, 152, 155, 156, 158, 159, 160, 161 & 162.

1°. L'article 147 est très-difficile; en voici le

commentaire. 1°. L'équation  $xx = 4ay - 4yy$  est un lieu au petit axe AB de la demi-ellipse AMB, Fig. 122. Pl. 7. Ce petit axe a pour paramètre  $4a$ , parce que le petit axe : au grand axe :: le grand axe : au paramètre du petit axe. L'équation a ce même petit axe est la suivante,  $AP^2 : AQ \times BQ ::$  le paramètre du petit axe : au petit axe ; donc  $xx : ay - yy :: 4a : a$  ; ce qui donne évidemment  $xx = 4ay - 4yy$ . Relisez la note 5°. 2°. Pour trouver  $AK = \frac{ax}{y}$ , il faut d'abord tirer de l'équation  $xx = 4ay - 4yy$  la valeur de  $2xx = 8ay - 8yy$  ; il faut ensuite conclure que  $dy = \frac{x dx}{2a - 4y}$  par là même que  $x dx = 2ady - 4ydy$ . Cela fait vous introduirez ces nouvelles valeurs dans l'équation  $AK = \frac{2xxdy - 2xydx}{x dy - 2y dx}$ , & vous trouverez après un très-grand nombre d'équations & de transformations  $AK = \frac{ax}{y}$ . 3°. La parabole qui a pour sommet le point A est asymptotique de celle qui passe par tous les points C, parce que toutes ces paraboles ont, avec le même paramètre  $4AB$ , différents sommets sur le même axe ; donc leurs différentes branches s'approcheront continuellement, sans pouvoir jamais se toucher.

2°. L'article 148 ne demande que cette seule remarque : l'on trouvera PQ (Fig. 123. Pl. 7.) =  $\frac{y dy}{dx}$ , en imaginant au point M un triangle infini-

ment petit, semblable au triangle MPQ dont les deux côtés  $dx$ ,  $dy$  seront homologues à PM, PQ. Il n'est pas nécessaire d'avertir que dans ce même article l'on a  $PC^2 = KC^2 + PK^2$  par la 47<sup>e</sup>. proposition du livre 1 des élémens d'Euclide, & non pas par la propriété du cercle.

3°. M. le Marquis de l'Hôpital a supposé dans son article 151 que l'on avoit présent à l'esprit l'article 11.

4°. A l'article 152 l'on a AT (Fig. 125. Pl. 7)  $= \frac{aa}{x}$ , parce que l'on a évidemment  $AP : AM ::$

$AM : AT$ , ou  $x : a :: a : AT = \frac{aa}{x}$ . Mais (art.

150)  $AT : AP :: AP : AK$ , ou  $\frac{aa}{x} : x :: x : AK$ ;

donc  $AK = \frac{x^3}{aa}$ . L'équation que l'on trouve à la

fin de cet article prouve que la courbe BCD est une courbe du troisieme genre. M. Varignon est parvenu d'une maniere plus simple à une équation qui prouve la même vérité. Voici comment

il raisonne : Puisque  $QC = \frac{xx}{a}$ , l'on aura  $CP = a$

$— \frac{xx}{a}$ . Ainsi  $QP(a) : QA(y) :: CP(a — \frac{xx}{a})$

:  $CK(z)$ ; donc  $az = \frac{aay - xxy}{a}$ ; donc  $aa\bar{z} = aay$

$— xxy$  donc  $a^4\bar{z}^2 = a^4y^2 — 2a^2x^2y^2 + x^4y^2$ .

Mais le cercle BMD donne  $AP \times PT = PM^2$ , ou,  $a^2 - x^2 = y^2$ ; donc  $a^4\bar{z}^2 = a^6 — 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$ ;

donc  $\sqrt[3]{a^4\bar{z}^2} = a^2 - x^2$ . Mais  $u = \frac{x^3}{aa}$ , donc  $x^3$

$\equiv aau$ , donc  $x = \sqrt[3]{aau}$ ; donc  $xx = \sqrt[3]{a^4uu}$ ; donc  $\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - \sqrt[3]{a^4uu}$ ; donc  $a \sqrt[3]{az^2} = aa - a \sqrt[3]{au^2}$ ; donc  $\sqrt[3]{az^2} = a - \sqrt[3]{au^2}$ ; donc l'équation de la courbe BCD prouve que c'est ici une courbe du troisieme genre.

5°. La proposition énoncée par l'article 155 est démontrée dans tous les Traités de Méchanique, & nommément dans celui de M. l'Abbé de la Caille, art. 364, pag. 113.

6°. Le mot *sesquialtere* pourroit embarrasser un Commençant. Etre *sesquialtere*, c'est avoir la moitié en sus;  $a$  sera *sesquialtere* de  $b$ , si l'on peut dire,  $a = \frac{3}{2}b$ . Si la portion ND de la courbe DNF (Fig. 125. Pl. 7.) étant multipliée par le rayon AB est *sesquialtere* du segment circulaire DMP, il s'ensuit que la courbe entiere DNF est égale aux trois quarts de BMD, quatrieme partie de la circonférence du cercle. En voici la démonstration, elle est de M. Crouzas.  $DNF \times AB$  est trois moitié de l'espace BADMB. Mais l'espace  $BADMB = AB \times \frac{DMB}{2}$ , donc  $DNF \times AB = \frac{1}{2} AB \times \frac{DMB}{2} = \frac{1}{4} ABDMB$ ; donc  $DNF = \frac{3}{4} DMB$ . Ces deux remarques ont été nécessaires pour l'intelligence de l'article 156.

7°. L'article 158 présente deux points qu'il faut nécessairement expliquer. 1°. Pour suivre M. le Marquis de l'Hôpital, lorsqu'il parle de la



différence de  $\frac{uy - xy}{\sqrt{aa - xx}} - y$ , il faut se rappeler

qu'après avoir cherché cette différence par les règles ordinaires, il parvient à une fraction dont il fait le numérateur = 0. 2°. Après avoir trouvé

$PK = \frac{m^3 + mmx}{aa}$ , il faudra chercher MC (Fig.

127. Pl. 7)  $= \frac{mm + mx}{a}$ . Pour le trouver, il faudra se souvenir que  $NK = PK - PN =$

$\frac{m^3 + mmx}{aa} - m = \frac{m^3 + mmx - aam}{aa}$ . Il faudra

faire ensuite la proportion suivante;  $PN(m) :$

$MN(a) :: NK\left(\frac{m^3 + mmx - aam}{aa}\right) : NC =$

$\frac{am^3 + ammx - a^3m}{aam} = \frac{mm + mx - aa}{a}$ . Mais MC

$= MN + NC = a + \frac{mm + mx - aa}{a}$ ; donc MC

$= \frac{mm + mx}{a}$ .

8°. Prenez garde, en lisant l'article 159, que les lignes LM,  $lm$  (Fig. 128. Pl. 7) peuvent être considérées comme parallèles, parce qu'elles forment un angle infiniment petit. Il en est de même de plusieurs autres lignes qui se trouvent dans cette figure.

9°. L'on aura la valeur de MC énoncée dans l'article 160, en disant  $m + n : m :: MC + CN(a) : MC$ .

10°. Avant que de lire l'article 161 du Traité des

des Infiniment Petits, il ne seroit pas mal de lire les articles 155 & 156 du Traité des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital.

11°. Dans l'article 162 l'on ne peut pas tirer MD parallèle à LN (Fig. 128. Pl. 7.) sans avoir MD : ML :: EF : EG; en voici la preuve. Si les lignes MD & LN sont parallèles, l'on aura l'angle MDL égal à son alterne ELG. Cela supposé, voici comment je raisonne: EF : EG :: le sinus de l'angle ELF : au sinus de l'angle ELG. Mais MD : ML :: le sinus de l'angle DLM, ou ELF : au sinus de l'angle MDL ou ELG; donc si MD & LN sont parallèles, l'on aura MD : ML :: EF : EG ::  $bbgh : accf - ccfh$ ; donc MD : ML (b) ::  $bbgh : accf - ccfh$ ; donc  $MD = \frac{b^3 gh}{accf - ccfh}$ ; donc par là même que MD sera parallèle à LN, l'on aura  $MD = \frac{b^3 gh}{accf - ccfh}$ .

## NOTE LIV.

LA plupart des articles de la section neuvieme que nous avons éclaircis, ne pouvoient guères se passer de commentaire. Le Lecteur n'en fera que trop convaincu, en jettant les yeux sur les numéros 6, 8, 9 & 10 de cette note.

1°. L'équation que donne la supposition de l'article 163 est  $PM = \frac{PN}{PU}$  (fig. 130. pl. 7). Il s'ensuit de là que lorsque M. le Marquis de l'Hô-

A a

pital dit que  $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$ , il prend évidemment la constante  $AB$  pour l'unité.

2°. Dans les articles 164 & 165 M. le Marquis de l'Hôpital différencie le numérateur de chaque fraction, en le considérant non pas comme numérateur, mais comme une quantité isolée. Il tient la même conduite vis-à-vis le dénominateur.

3°. Pour comprendre la fin de l'article 169, il faut relire la fin de l'article 89.

4°. C'est par l'article 170 que l'on fait à l'article 171  $y = \frac{x^2}{2}$ .

5°. La proportion de l'article 178 n'est bonne, que parce qu'on considère l'arc infiniment petit  $Mm$  (fig. 135, 136, pl. 7) comme la mesure de l'angle  $MGm$ . Or on a droit de le considérer ainsi, puisqu'il seroit confondu avec un arc de cercle infiniment petit  $Mm$  qui auroit pour rayon  $GM$ , pour centre le point  $G$ , & qui par là même seroit la mesure de l'angle  $MGm$ .

6°. L'on a, à l'article 180,  $MI \times MG = BM \times MN$ , (fig. 136. pl. 7) parce qu'il est démontré dans tous les élémens de Géométrie que, deux lignes qui se coupent dans un cercle, se coupent en raison réciproque.

S'il s'agit de prouver dans ce même article qu'au point d'inflexion  $F$ , la ligne  $MR$  est plus grande que la ligne  $MG$ , il faudra d'abord supposer pour un moment que  $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}} = \sqrt{aa - cc}$ .

Cette supposition vous donnera  $a \equiv c$ , ou  $KN = KM$ ; ce qui est impossible. Il faudra ensuite supposer que  $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$  est plus grande que  $\sqrt{aa - cc}$ ; cette seconde supposition donnera  $c$  plus grand que  $a$ , ou  $KM$  plus grand que  $KN$ ; ce qui est encore impossible; donc au point d'inflexion  $F$  l'on aura  $MG$  moindre que  $MR$ . Enfin l'on ne peut pas supposer, ainsi qu'on l'assure sur la fin de l'article 180, que  $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$  soit plus grand que  $a - c$ , sans avoir  $KM (c)$  plus grand que  $\frac{aa}{a + b}$ . La preuve en est renfermée dans le calcul suivant. Il n'est pas nécessaire d'avertir que le signe  $>$  signifie *plus grand*.

$$\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}} > a - c \text{ par hypothèse.}$$

$$\frac{aab - bcc}{2a + b} > aa - 2ac + cc$$

$$aab - bcc > 2a^3 - 4aac + 2acc + aab - 2abc + bcc$$

$$0 > 2a^3 - 4aac + 2acc - 2abc + 2bcc.$$

Cette dernière équation signifie que les quantités  $4aac$  &  $2abc$  affectées du signe  $-$  surpassent les quantités  $2a^3$ ,  $2acc$  &  $2bcc$  affectées du signe  $+$ . Reprenons ce calcul.

$$4aac + 2abc > 2a^3 + 2acc + 2bcc$$

$$2aac + abc > a^3 + acc + bcc$$

$$aac + abc > a^3 - aac + acc + bcc$$

$$aac + abc - acc - bcc > a^3 - aac.$$

Divisons ces deux quantités par  $a + b$ , nous aurons

A a 2

$$ac - cc > \frac{a^3 - aac}{a + b}$$

$$\frac{a - c}{a + b} \times c > \frac{aa \times a - c}{a + b}$$

$$c > \frac{aa}{a + b}$$

Donc si l'on suppose  $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$  plus grand que  $a - c$ , l'on trouvera  $c$  plus grand que  $\frac{aa}{a + b}$ .

7°. L'on peut demander en lisant l'article 182, pourquoi  $GMm + MGg$  (fig. 135. pl. 7.) =  $\frac{2a + 3b}{b} MGg + \frac{a + b \times cc - aa}{aab} KGg$ . L'on ré-

pondra que  $GMm + MGg = \frac{2a + 2b}{b} MGg +$

$$MGg + \frac{a + b \times cc - aa}{aab} KGg = \frac{2a + 2b}{b} MGg$$

$$+ \frac{b}{b} MGg + \frac{a + b \times cc - aa}{aab} KGg, \text{ parce que}$$

$$\frac{b}{b} = 1, \text{ \& que } MGg = 1MGg. \text{ Mais } \frac{2a + 2b}{b}$$

$$MGg + \frac{b}{b} MGg = \frac{2a + 3b}{b} MGg; \text{ donc \&c.}$$

8°. L'article 183 présente une autre solution du problème de l'article 182. Il se comprend à la première lecture, lorsqu'on se rappelle que, par la propriété du cercle,  $PE$  (fig. 140. pl. 7) =

$$AP \times PV = 2cu - uu; \text{ \& que } EM(\gamma) = \frac{x\gamma}{a}$$

$$(\text{art. 171}), = \frac{ax\gamma}{aa}, \text{ devient par là même } \frac{ax\gamma}{bc},$$

parce que  $OB(b) : KB(a) :: KB(a) : AK(c)$ ; donc  $aa = bc$ ; donc si l'on a  $EM = \frac{axz}{aa}$ , l'on aura  $EM = \frac{axz}{bc}$ .

L'on assure à la fin du même article 183 que par là même que l'espace  $AEH =$  au rectangle  $PQ$ , moins le double de l'espace circulaire  $APE$ , l'on aura  $AEH = PE \times KA + KP \times AE$ . Le calcul suivant va mettre cette vérité dans tout son jour.

Je nomme  $AK, a$ ;  $KP, b$ ;  $PE, c$ ;  $EH$ , ou l'arc  $AE, d$ . Cela fait, voici comment je raisonne : le rectangle  $PQ = AK + KP \times PE + EH = a + b \times c + d = ac + bc + ad + bd$ .

L'espace circulaire  $APE = AK \times \frac{1}{2} AE + KP \times \frac{1}{2} PE = \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2}$ ; donc  $2APE = ad + bc$ ; donc le rectangle  $PQ - 2APE = ac + bc + ad + bd - ad - bc = ac + bd$ . Mais  $PE \times KA + KP \times AE = ac + bd$ . Donc si l'espace  $AEH$  est égal au rectangle  $PQ$ , moins le double de l'espace circulaire  $APE$ , il sera par là même égal à  $PE \times KA + KP \times AE$ . L'on a supposé dans ce calcul que le point  $P$  tomboit au dessous de  $K$ ; car lorsqu'il tombe au dessus, l'on a  $AEH = PE \times KA - KP \times AE$ .

9°. Pour comprendre l'article 185, voici ce qu'il faut se rappeler. 1°. L'espace  $AEM = \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA + \frac{aa + ab}{bc} KP \times AE$ . Mais  $KP = KV - VP = u - c$ ; donc  $-KP = c - u$ ;

donc  $\frac{aa + ab}{bc} - \overline{KP \times AE} = \frac{aac + abc - aa u - abu}{bc} \times$

$AE$ . 2°. Le secteur  $AKE = \frac{AK}{2} \times AE = \frac{c}{2} \times$

$AE$ . 3°. L'espace  $AEM$  + le secteur  $AKE =$

$\frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA} + \frac{aac + abc - aa u - abu}{bc} AE$

$+ \frac{c}{2} \times AE$  ; donc l'on aura l'espace  $AEM$

+ le secteur  $AKE = \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA} +$

$\frac{2aac + 2abc - 2aa u - 2abu + bcc}{2bc} AE$ . 4°. On ne

peut pas faire dans ce même article 185,  $u =$

$\frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab}$  sans faire  $2aa u + 2abu = 2aac$

+  $2abc + bcc$ , & par conséquent sans rendre nulle

la valeur  $\frac{2aac + 2abc + bcc - 2aa u - 2abu}{2bc} AE$  :

10°. Le dernier article de la neuvième section, c'est-à-dire, l'article 186 présente quelques difficultés que nous allons éclaircir en peu de mots.

1°. Si  $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ , l'on aura  $xx = \frac{1}{2}aa$ , &  $2xx = aa$  ; donc en faisant  $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ , le dénominateur de la fraction  $\frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$  deviendra 0, ce

qui est une marque de l'infini. 2°. Lorsque le point  $M$  (Fig. 141. Pl. 7.) tombe en  $D$ , l'on a

$AM = AD$ , ou  $x = a$  ; donc l'on a  $-\frac{x^3}{2aa} =$

$-\frac{a^3}{2aa} = -\frac{1}{2}a$ . 3°. Pour tirer de l'équation  $y^4$

$= x^4 + aaxx - b^4$  la valeur de DD ou 2AD (Fig. 142. Pl. 7), M. le Marquis de l'Hôpital a fait  $PM = 0$ , parce que dans cette supposition l'on a  $AD = x$ . Il a ensuite cherché la valeur de  $x$ , en maniant suivant les règles ordinaires, l'équation  $x^4 + aaxx - b^4 = 0$ ; & il a trouvé  $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 4b^4}}$ , & par conséquent  $2AD$  ou  $2x = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$ .

---

## NOTE LV.

LA dixieme section est sans contredit la moins importante de toutes. Elle n'apprend que ce que sçavent tous les Mathématiciens, c'est-à-dire, que par le calcul des *différences* on résout beaucoup plus facilement que par toute autre méthode, les problèmes proposés dans les neuf sections précédentes. Pour se convaincre de cette vérité, il ne sera pas nécessaire de lire les 22 articles qui composent la dixieme section; on pourra se contenter de la lecture de l'article 208; on verra combien compliquée est l'équation que donnent les méthodes qui ne sont pas fondées sur le calcul différentiel, dont M. le Marquis de l'Hôpital nous a donné les règles avec autant de clarté, que de précision dans son *Analyse des Infinitement Petits*.





# TABLE.

**SECTION I.** Où l'on donne les règles du calcul différentiel. page 1.

**PROPOSITION I.** Où l'on enseigne à prendre la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres. 4

**PROPOSITION II.** Où l'on enseigne à prendre la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres. 5

**PROPOSITION III.** Où l'on enseigne à prendre la différence d'une fraction quelconque. 6

**PROPOSITION IV.** Où l'on enseigne à prendre la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable. 7

**SECTION II.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les tangentes de toutes sortes de lignes courbes. 24

**PROPOSITION I.** Où l'on enseigne la méthode de tirer d'un point donné une tangente sur une courbe dont on connoît la relation qui regne entre la coupée & l'appliquée. 24

**Les 15 Propositions suivantes de la même Section contiennent des Problèmes analogues aux tangentes.**

**SECTION III.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes ou les moindres appliquées. 57

**PROPOSITION GÉNÉRALE.** Où l'on enseigne la méthode de trouver la plus grande, ou la moindre appliquée, la nature de la ligne courbe étant donnée. 58

**SECTION IV.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement. 77

PROPOSITION I

# T A B L E.

377

- PROPOSITION I.** Où l'on enseigne à prendre la différence d'une quantité composée de différences quelconques. 82
- PROPOSITION II.** Où l'on apprend à déterminer le point d'inflexion ou de rebroussement, la nature de la ligne courbe étant donnée. 84
- SECTION V.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les développées. 102
- PROPOSITION I.** Où l'on apprend à déterminer la longueur du rayon de la développée. 105
- PROPOSITION II.** Où l'on apprend à trouver le point où l'axe touche la développée. 114
- PROPOSITION III.** Où l'on apprend à trouver une infinité de lignes qui aient la même développée. 144
- SECTION VI.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réflexion. 148
- PROPOSITION I.** Où l'on enseigne à trouver sur le rayon réfléchi, donné de position, le point où il touche la caustique. 152
- PROPOSITION II.** Où l'on résout le Problème suivant : la caustique par réflexion étant donnée avec le point lumineux, trouver une infinité de courbes, dont elle soit caustique par réflexion. 167
- SECTION VII.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les caustiques par réfraction. 172
- PROPOSITION I.** Où l'on enseigne à trouver sur le rayon rompu, donné de position, le point où il touche la caustique par réfraction. 173
- PROPOSITION II.** Où l'on résout le Problème suivant : la caustique par réfraction étant donnée, avec son point lumineux, & la raison de  $m$  à  $n$ ; trouver une infinité de courbes dont elle soit caustique par réfraction. 182
- SECTION VIII.** Où l'on fait usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes. 187

Bb

**PROPOSITION I.** Où l'on enseigne à trouver une ligne courbe qui touche une infinité de paraboles qui passent toutes par un même point. 228

Les 5 Propositions suivantes contiennent des Problèmes analogues au sujet exposé au commencement de la Section VIII.

**SECTION IX.** Où l'on trouve la Solution de quelques Problèmes qui dépendent des méthodes précédentes. 206

Les Problèmes résolus dans cette Section sont au nombre de 5.

**SECTION X.** Où l'on trouve une nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes Géométriques, d'où l'on déduit la méthode de Mrs. De Cartes & Hudde. 233

Cette nouvelle méthode est employée dans les 7 Propositions qui forment cette Section.

**COMMENTAIRE** des articles les plus difficiles de l'Analyse des Infiniment Petits. 257

**NOTE I.** Analogue à l'article 2. 257

**NOTE II.** Analogue à l'article 5. 258

**NOTE III.** Analogue à l'article 6. 261

**NOTE IV.** Analogue à l'article 7. 261

**NOTE V.** Analogue à la Section seconde considérée en général. 273

**NOTE VI.** Analogue à l'article 9. 283

**NOTE VII.** Analogue à l'article 11. 284

**NOTE VIII.** Analogue à l'article 12. 289

**NOTE IX.** Analogue à l'article 13. 294

**NOTE X.** Analogue à l'article 14. 297

**NOTE XI.** Analogue à l'article 15. 301

**NOTE XII.** Analogue aux articles 17 & 18. 303

**NOTE XIII.** Analogue à l'article 21. 304

**NOTE XIV.** Analogue à la Proposition 5 de la 2<sup>e</sup> Section. 306

**NOTE XV.** Analogue à la Proposition 6 de la même Section. 308

# T A B L E.

379

NOTE XVI.	Analogue à l'article 26.	308
NOTE XVII.	Analogue à la Proposition 8 de la 2 <sup>e</sup> . Section.	309
NOTE XVIII.	Analogue à la Proposition 9 de la même Section.	310
NOTE XIX.	Analogue à l'article 31.	311
NOTE XX.	Analogue à l'article 32.	312
NOTE XXI.	Analogue à l'article 34.	313
NOTE XXII.	Analogue à l'article 36.	313
NOTE XXIII.	Analogue à l'article 39.	314
NOTE XXIV.	Analogue à l'article 40.	315
NOTE XXV.	Analogue à la Proposition 16 de la 2 <sup>e</sup> . Section.	317
NOTE XXVI.	Analogue à la troisième Section con- sidérée en général.	318
NOTE XXVII.	Analogue à l'article 48.	321
NOTE XXVIII.	Analogue à l'article 49.	322
NOTE XXIX.	Analogue à l'article 50.	322
NOTE XXX.	Analogue à l'article 51.	322
NOTE XXXI.	Analogue à l'article 52.	323
NOTE XXXII.	Analogue à l'article 53.	324
NOTE XXXIII.	Analogue à l'article 54.	324
NOTE XXXIV.	Analogue à l'article 56.	325
NOTE XXXV.	Analogue à l'article 58.	325
NOTE XXXVI.	Analogue à l'article 59.	327
NOTE XXXVII.	Analogue à l'article 61.	329
NOTES XXXVIII. XXXIX. XL.	Analogues à la Section 4 <sup>e</sup> , considérée en général.	332
NOTE XLI.	Analogue à l'article 66.	340
NOTE XLII.	Analogue à l'article 67.	344
NOTE XLIII.	Analogue à l'article 68.	344
NOTE XLIV.	Analogue à l'article 69.	344
NOTE XLV.	Analogue à l'article 70.	345
NOTE XLVI.	Analogue à l'article 71.	346
NOTE XLVII.	Analogue à l'article 72.	348
NOTE XLVIII.	Analogue à l'article 73.	350
NOTE XLIX.	Analogue à l'article 74.	350

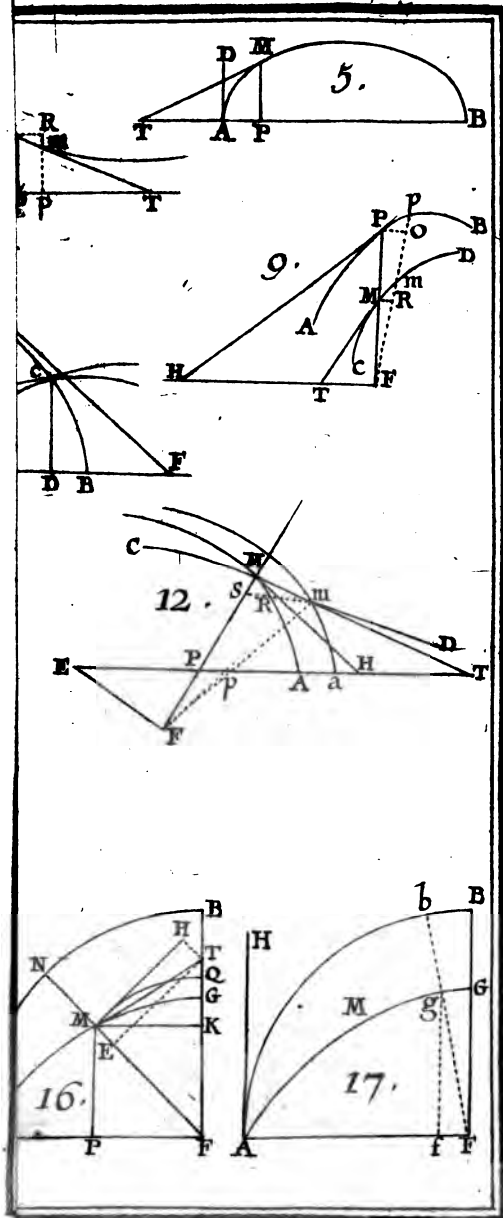
NOTE L. Analogue aux principaux articles de la 5 <sup>e</sup> Section.	35
NOTE LI. Analogue aux principaux articles de la 6 <sup>e</sup> Section.	35
NOTE LII. Analogue aux principaux articles de la 7 <sup>e</sup> section.	35
NOTE LIII. Analogue aux principaux articles de la 8 <sup>e</sup> section.	36
NOTE LIV. Analogue aux principaux articles de la 9 <sup>e</sup> section.	36
NOTE LV. Analogue à la 16 <sup>e</sup> section considérée en général.	37

FIN.

## Fautes à corriger.

Page	6	ligne	20	$\frac{x}{x}$	lisez	$\frac{x}{y}$ .	
page	12	ligne	4	ayypx	lisez	ayydx.	C
deux fautes ne sont que dans quelques exemples.							
page	38	ligne	20	de	lisez	des	
page	46	ligne	24	NQ	lisez	MQ	
page	65	ligne	20	$x \times$	lisez	$xx$	
page	133	ligne	23	forre	lisez	sorte	
page	195	ligne	7	QC	lisez	QC	
page	297	ligne	19	$a \times y$	lisez	$axy$	
page	338	ligne	7	lisez	$\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy} \sqrt{dx^2 + c}$		

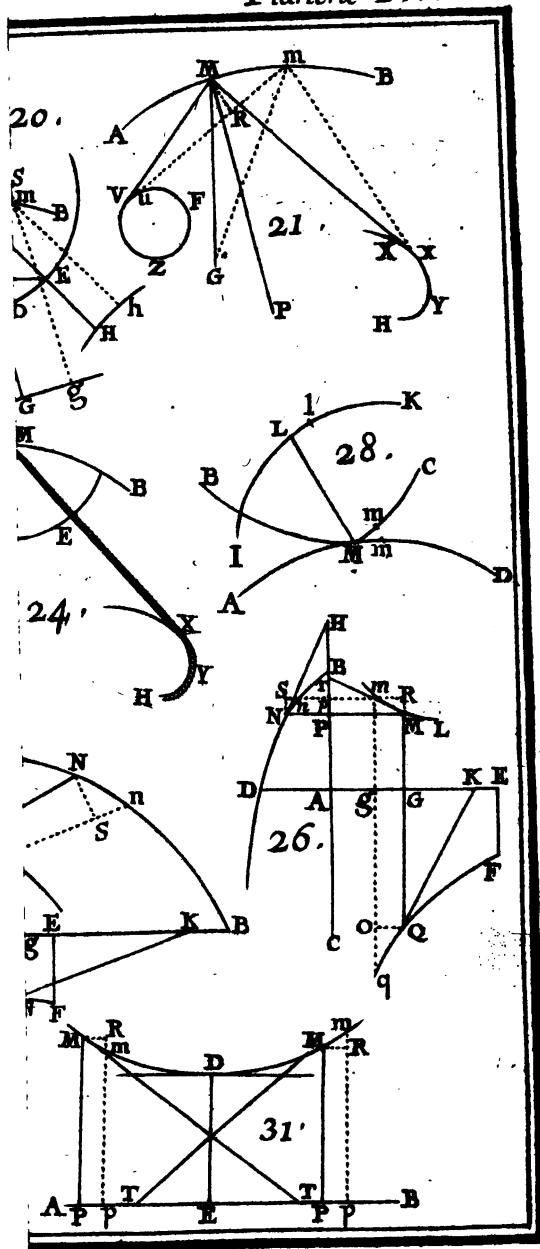
# Planche I.



Laure Sculpsit.



Planche 2.





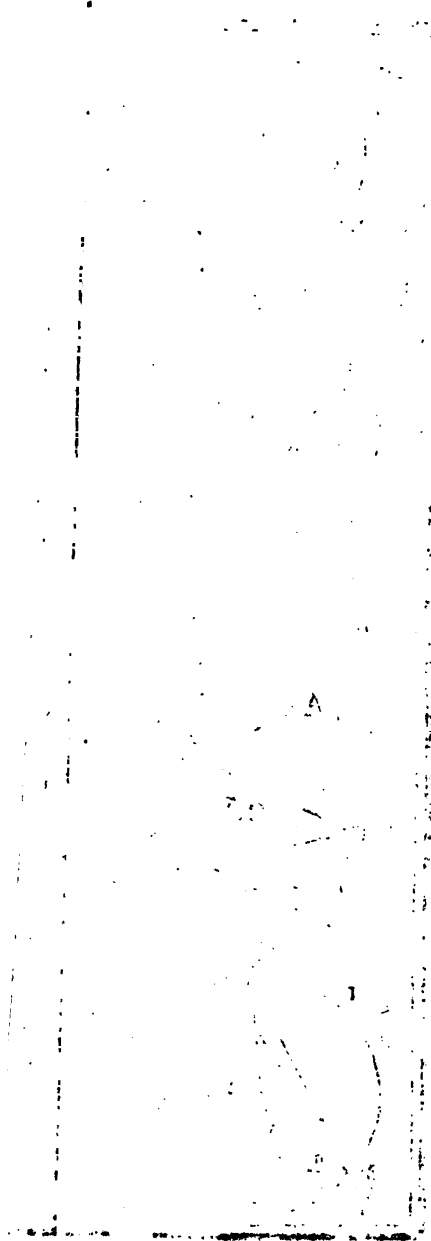


Planche 3.

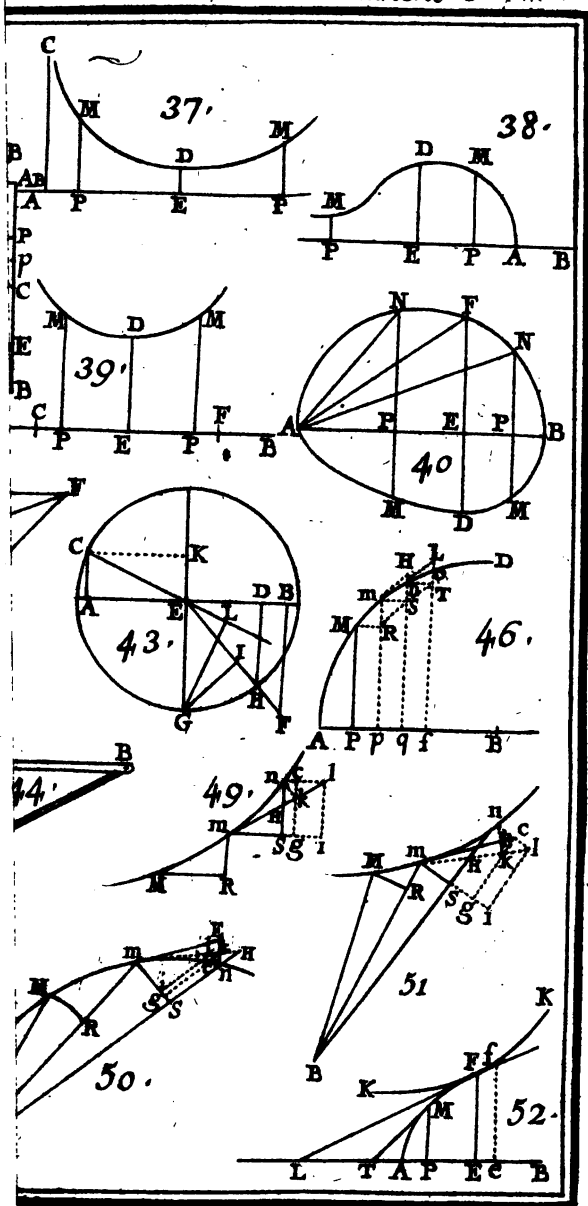
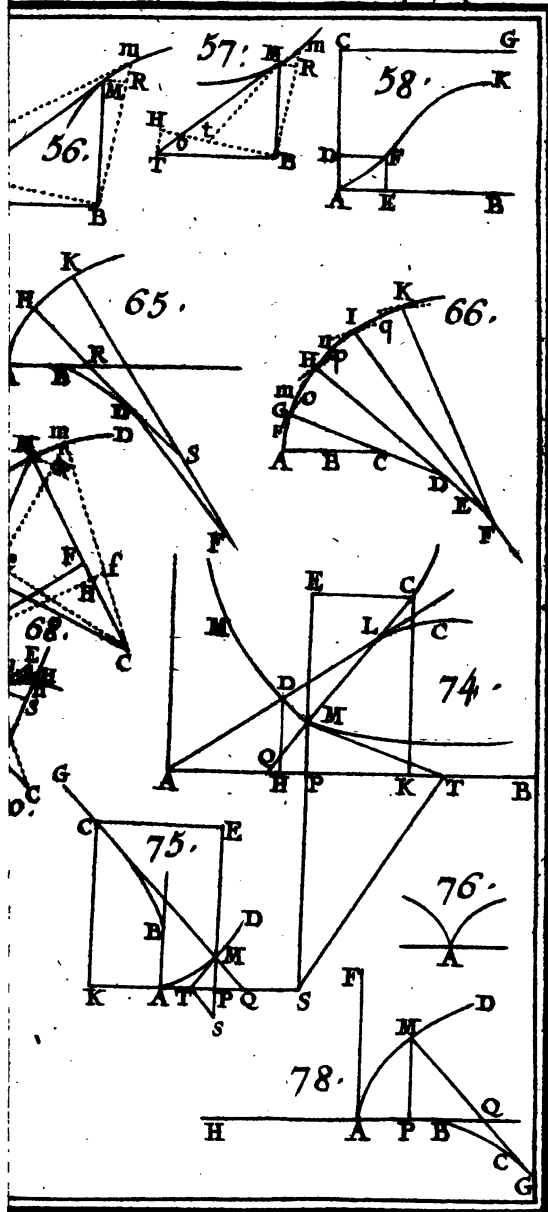


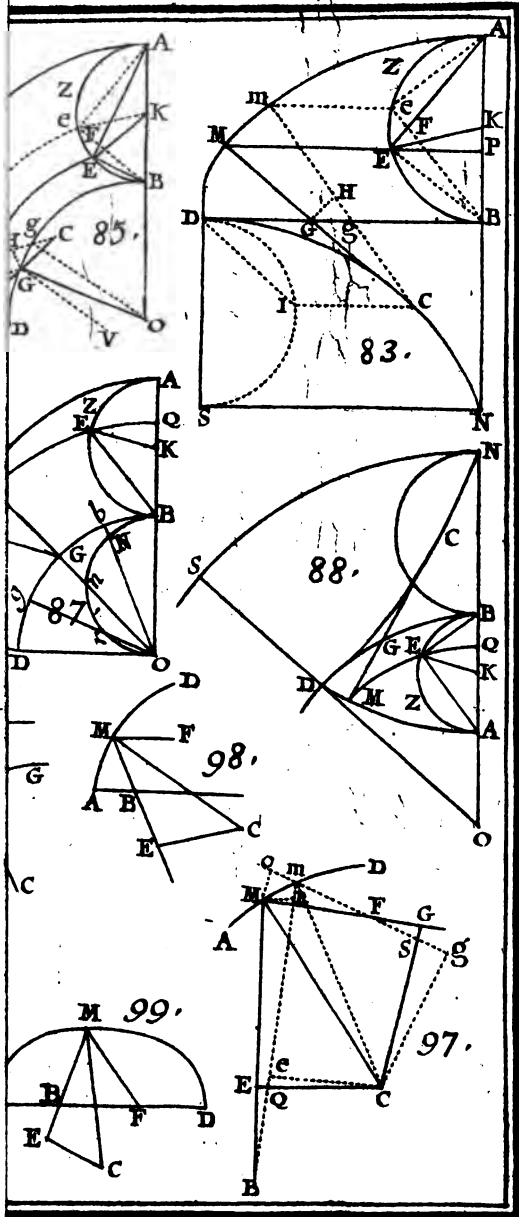


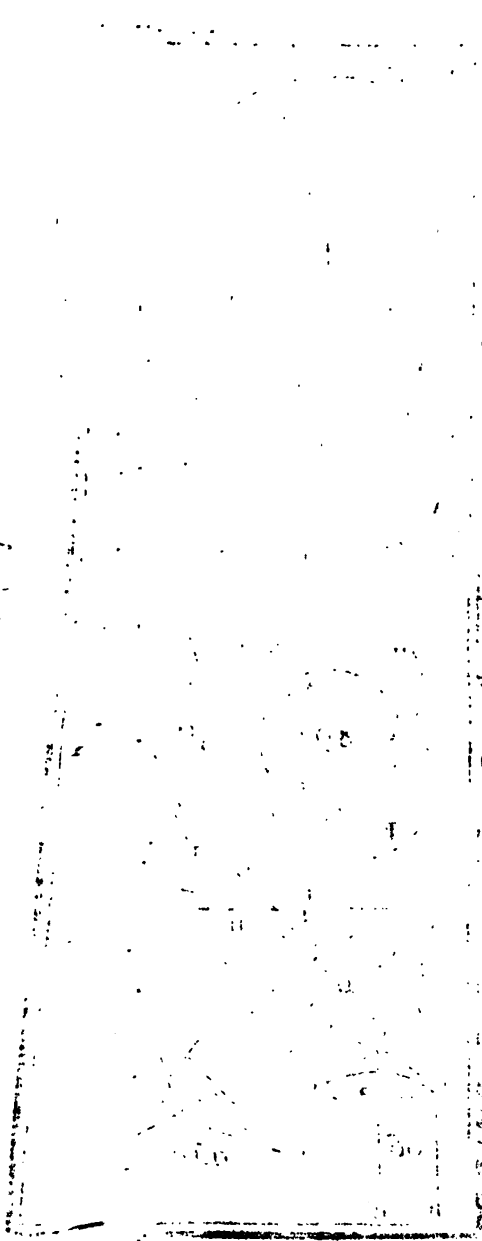
Planche 4.



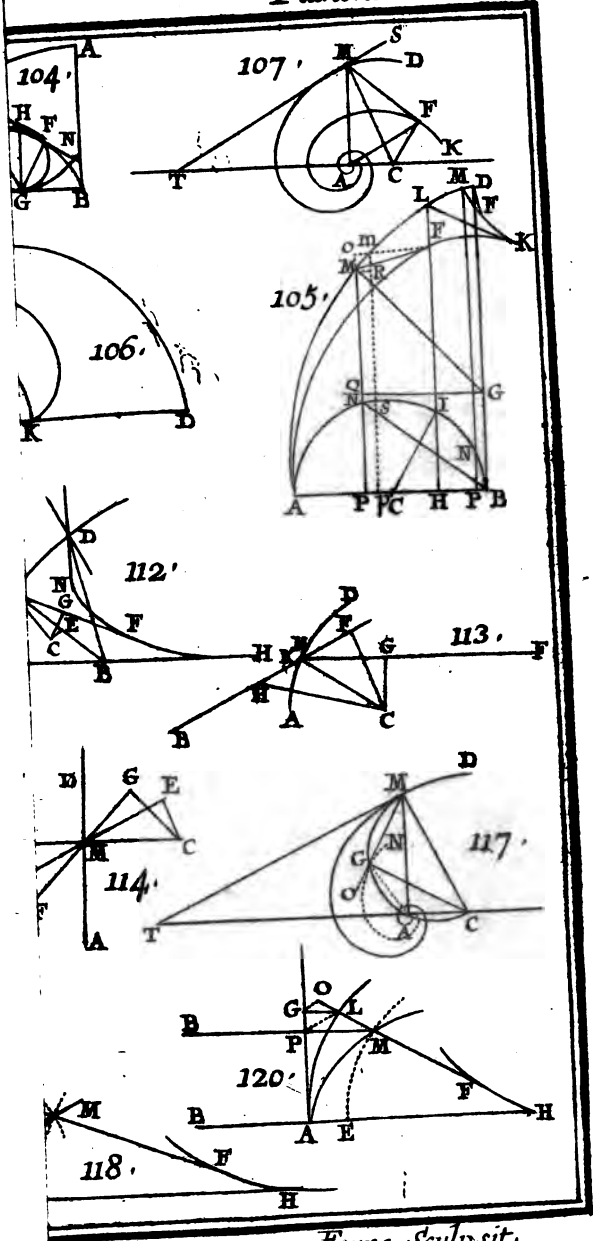
Faure Sculpfit.







# Planche 6.



Faire Sculptsit.



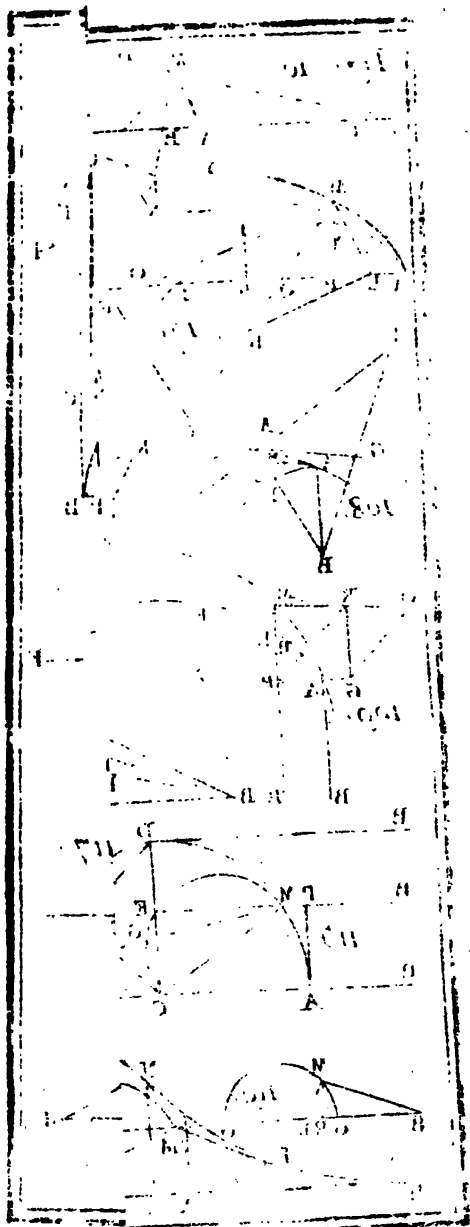
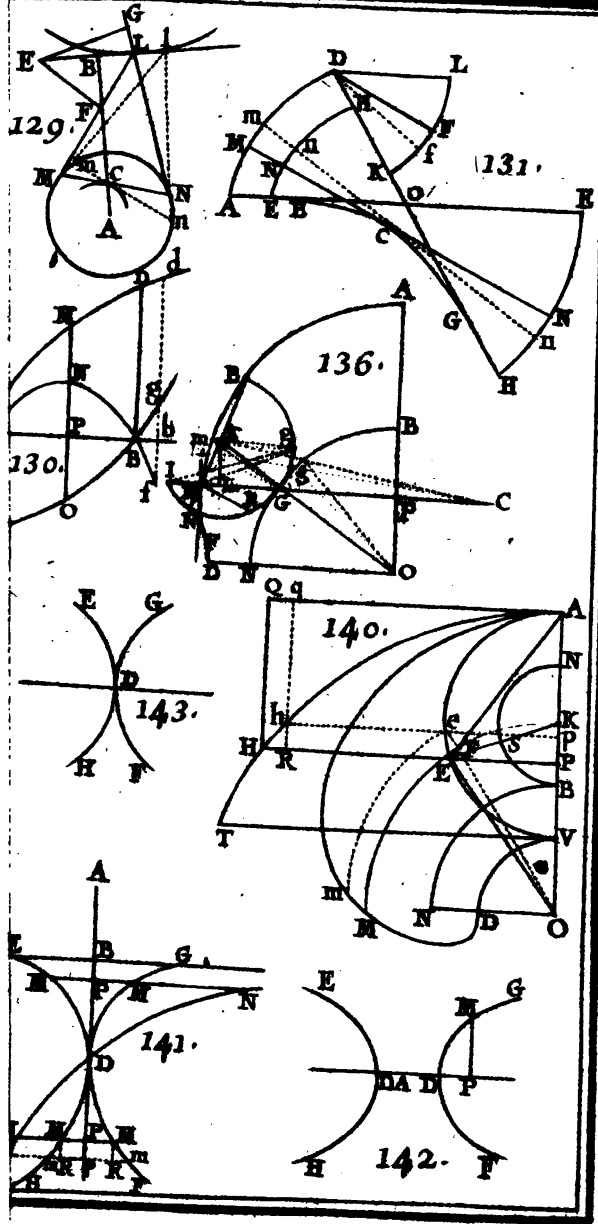
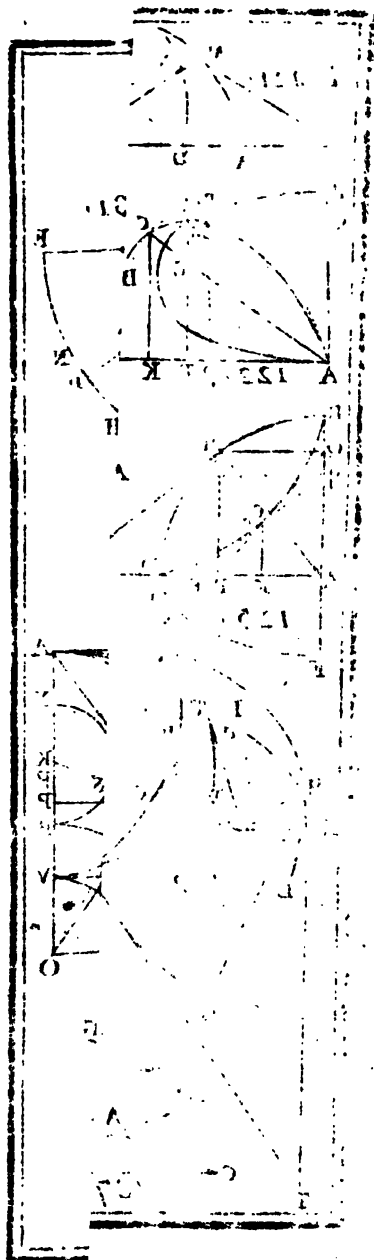


Planche 7.





# Planche 8

